問題 6.4 (P.135)

1. (1) $g(x_1, x_2) = [x_1\ x_2]\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$ より. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ とおくと.

$g_A(t) = \begin{vmatrix}t-1 & -2\\ -2 & t-1\end{vmatrix} = t^2-2t-3 = (t-3)(t+1)$ ゆえに. Aの固有値は 3と−1

$A-3E_2 = \begin{bmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $A+E_2 = \begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ より.

$\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$ は Aの固有ベクトルで. $\left\{\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\right\}$ は $\mathbb{R}^2$の基であるから. これを正規直交化し.

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\right\}$ を得る。ゆえに. $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ とおけば, ${}^tPAP = \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

$\therefore\ {}^t[x_1\ x_2] = P\cdot{}^t[y_1\ y_2]$ によって.

$g(x_1, x_2) = g_0(y_1, y_2) = [y_1\ y_2]({}^tPAP)\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = 3y_1^2 - y_2^2$ となる。

(2) $g(x_1, x_2, x_3) = A[x] = [x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$ より. $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ $\left(x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\right)$

$\therefore\ g_A(t) = \begin{vmatrix}t & -1 & 0\\ -1 & t & -1\\ 0 & -1 & t\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t & 0 & -t\\ -1 & t & -1\\ 0 & -1 & t\end{vmatrix} = t\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & t & -2\\ 0 & -1 & t\end{vmatrix} = t(t^2-2) = t(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})$

よって Aの固有値は $0, \pm\sqrt{2}$ だから.

$A \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $A-\sqrt{2}E_3 \to \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -\sqrt{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $A+\sqrt{2}E_3 \to \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ より.

$\left\{\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{bmatrix}\right\}$ を正規直交化すると. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{bmatrix}\right\}$

ゆえに. $P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\sqrt{2} & 1 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 1 & 1\end{bmatrix}$ とすると. ${}^tPAP = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\end{bmatrix}$

したがって. $x = Py$ により.

$g(x_1, x_2, x_3) = g_0(y_1, y_2, y_3) = \sqrt{2}y_2^2 - \sqrt{2}y_3^2$ // $\left(y=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}\right)$

(3) $g(x_1, x_2, x_3) = A[x] = {}^tx\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2} & 0\\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & 1\end{bmatrix}x$ より. $A=\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2} & 0\\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & 1\end{bmatrix}$

$\therefore\ g_A(t) = \begin{vmatrix}t-1 & -\sqrt{2} & 0\\ -\sqrt{2} & t-1 & -\sqrt{2}\\ 0 & -\sqrt{2} & t-1\end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ -\sqrt{2} & t-1 & -\sqrt{2}\\ 0 & -\sqrt{2} & t-1\end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -\sqrt{2} & t-1 & -2\sqrt{2}\\ 0 & -\sqrt{2} & t-1\end{vmatrix} = (t-1)(t^2-2t-3)$

(1-(3)のつづき)

$g_A(t)=(t-1)(t-3)(t+1)$. ゆえに Aの固有値は $1, 3, -1$ なので,

$A-E_3 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A-3E_3 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A+E_3 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

よって $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ を正規直交化すると $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

したがって, $P=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とおけば, ${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ で, $x=Py$ によって

$q(x_1, x_2, x_3) = q_0(y_1, y_2, y_3) = y_1^2+3y_2^2-y_3^2$ //

2. (1) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-x_3^2 = (x_1+x_2)^2-x_3^2$ と変形できるので,

$y_1=x_1+x_2$, $y_2=x_3$ $y_3=x_1$ とおけば,

$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ で, $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ とすると. Qは正則で, $y=Qx$

$Q^{-1}=P$ とすると. $P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ で, $x=Q^{-1}y=Py$ により.

$q(x_1, x_2, x_3) = {}^tx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = {}^ty \cdot {}^tP \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} P y = {}^ty \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y$ となり,

符号は$(1, 1)$ //

(2) $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_3x_4$

$= (x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)+x_2^2+(x_3^2+2x_3x_4+x_4^2)-(x_3^2-2x_3x_4+x_4^2)$

$= (x_1+x_2)^2+x_2^2+(x_3+x_4)^2-(x_3-x_4)^2$

ゆえに. $y_1=x_1+x_2$, $y_2=x_2$, $y_3=x_3+x_4$, $y_4=x_3-x_4$ とすれば,

$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ で, $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, $y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$ $Q=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ とすると Qは正則で,

$Q^{-1}=P$ とおくと. $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ で, $x=Py$

$\therefore q(x_1, x_2, x_3, x_4) = {}^tx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} x = {}^ty \cdot {}^tP \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} P \cdot y = {}^ty \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} y$

また, 符号は $(3, 1)$ //

(3) $g(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_2x_4$

$= (x_1^2 + 4x_1x_3 + 4x_3^2) - x_3^2 + 3(x_2^2 - 2x_2x_4 + x_4^2) - 3x_4^2$

$= (x_1+2x_3)^2 - x_3^2 + 3(x_2-x_4)^2 - 3x_4^2$

$= (x_1+2x_3)^2 + \{\sqrt{3}(x_2-x_4)\}^2 - x_3^2 - (\sqrt{3}x_4)^2$

ゆえに、$y_1 = x_1+2x_3$, $y_2 = \sqrt{3}x_2 - \sqrt{3}x_4$, $y_3 = x_3$, $y_4 = \sqrt{3}x_4$ とすると、

$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ とでき、$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ とおくと、

$P := Q^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$

$\therefore g(x_1,x_2,x_3,x_4) = {}^t\boldsymbol{x} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{y}\, {}^tP \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} P \boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{y} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$

よって符号は $(2, 2)$〃

3. (1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とおき、定理6.4.3 (→P.133) を用いる。

$|A_1| = |2| = 2 > 0$, $|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$, $|A_3| = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0$

ゆえに、$\forall k \in \{1,2,3\}$ で $|A_k| > 0$ となるので、これは正定値である〃

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ とおくと、$|A_1| = |1| = 1 > 0$, $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0$

$|A_3| = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 > 0$

ゆえに、$\forall k \in \{1,2,3\}$ で $|A_k| > 0$ となるので、定理6.4.3より、これも正定値〃

4. $g(x_1,\cdots,x_n)$ が負定値とする。$h(x_1,\cdots,x_n) = -g(x_1,\cdots,x_n)$ とおくと、

$h(x_1,\cdots,x_n) = -A[\boldsymbol{x}] = -{}^t\boldsymbol{x} \cdot A \cdot \boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}(-A) \cdot \boldsymbol{x}$

今、$g(x_1,\cdots,x_n)$ が負定値なので、$-g(x_1,\cdots,x_n) = h(x_1,\cdots,x_n)$ は正定値

ゆえに、$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ とすると $-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nn} \end{bmatrix}$ で、定理6.4.3より

$1 \leq k \leq n$ に対し、$|(-A)_k| > 0$

(4のつづき)

また、$|(-A)_k| = \begin{vmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{k1} & \cdots & -a_{kk} \end{vmatrix} = (-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} = (-1)^k|A_k|$ となることから、

$1 \le k \le n$ に対し、$(-1)^k|A_k| > 0$

逆に、2次形式 $g(x_1, \cdots, x_n)$ が $(-1)^k|A_k| > 0$ $(1 \le k \le n)$ をみたすと仮定する。

$f(x_1, \cdots, x_n) = -g(x_1, \cdots, x_n) = {}^t x(-A)x$, $B = -A$ とおくと、

$|B_k| = |(-A)_k| = (-1)^k|A_k|$ で、仮定より、$(-1)^k|A_k| > 0$ だから $|B_k| > 0$ $(1 \le k \le n)$

ゆえに、定理 6.4.3より $f(x_1, \cdots, x_n)$ は正定値となるので、

$-f(x_1, \cdots, x_n) = g(x_1, \cdots, x_n)$ は負定値。

5. (1) $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ とすると、$(-1)^1|A_1| = -|-4| = 4 > 0$, $(-1)^2|A_2| = |A| = 4-1 = 3 > 0$

よって、$1 \le k \le 2$ で、$(-1)^k|A_k| > 0$ となるので、これは負定値。

(2) $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & -12 \end{bmatrix}$ とおくと、

$(-1)^1|A_1| = (-1)|-1| = 1 > 0$, $(-1)^2|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 3-1 = 2 > 0$

$(-1)^3|A_3| = -|A| = -\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & -12 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} = 22-16 = 6 > 0$

∴ $1 \le k \le 3$ で、$(-1)^k|A_k| > 0$ となるので、これは負定値。