問題6.3 (P.127)

1.(1) $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ とおき、Aの固有多項式を $g_A(t)$ とすると、

$$g_A(t)=\begin{vmatrix}t&0&-1\\0&t-1&0\\-1&0&t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-1&0&-1\\t-1&t-1&0\\t-1&0&t\end{vmatrix}=(t-1)\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&t-1&1\\0&0&t+1\end{vmatrix}=(t-1)^2(t+1)$$

よって、Aの固有値は 1 と -1

$A-E_3=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ より、$W(1;A)=\left\{c_1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \middle| c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}$

$A+E_3=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ より、$W(-1;A)=\left\{c\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \middle| c\in\mathbb{R}\right\}$

ここで、$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ は全て直交しているので、ノルムを1にそろえるだけでよい。

つまり、$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&1&1\\\sqrt{2}&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$ とすれば、${}^tPAP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ と対角化できる。//

(2) $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&4&3\\0&3&1\end{bmatrix}$ とすると、$g_A(t)=\begin{vmatrix}t-1&-1&0\\-1&t-4&-3\\0&-3&t-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-1&-1&-3(t-1)\\-1&t-4&0\\0&-3&t-1\end{vmatrix}=(t-1)\begin{vmatrix}t-1&-10&0\\-1&t-4&0\\-0&-3&t-1\end{vmatrix}$

$$=(t-1)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}t-1&-10\\-1&t-4\end{vmatrix}=(t-1)(t^2-5t-6)=(t-1)(t-6)(t+1)$$

ゆえに、Aの固有値は 1, 6, -1

$A-E_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&3&3\\0&3&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ より、$W(1;A)=\left\{a\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix} \middle| a\in\mathbb{R}\right\}$

$A-6E_3=\begin{bmatrix}-5&1&0\\1&-2&3\\0&3&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&-9&15\\3&-6&9\\0&3&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&0&-1\\0&3&-5\\0&0&0\end{bmatrix}$ より $W(6;A)=\left\{b\begin{bmatrix}1\\5\\3\end{bmatrix} \middle| b\in\mathbb{R}\right\}$

$A+E_3=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&5&3\\0&3&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&-9&-6\\3&15&9\\0&3&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&0&-1\\0&3&2\\0&0&0\end{bmatrix}$ より、$W(-1;A)=\left\{c\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix} \middle| c\in\mathbb{R}\right\}$

上と同様に、$\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\5\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$ は直交しているのでノルムを1にするだけでよい。

∴ $u_1=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}$, $u_2=\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{bmatrix}1\\5\\3\end{bmatrix}$, $u_3=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$ とおき、$P=[u_1, u_2, u_3]$ とすれば、

${}^tP\cdot A\cdot P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&6&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ と対角化ができる。//

(3) $A=\begin{bmatrix}2&0&\sqrt{10}\\0&-1&2\\\sqrt{10}&2&1\end{bmatrix}$ とおくと. $g_A(x)=\begin{vmatrix}x-2&0&-\sqrt{10}\\0&x+1&-2\\-\sqrt{10}&-2&x-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-2&0&-\sqrt{10}\\0&x+1&-2\\-\sqrt{10}&2x&x-5\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}x-2&0&-\sqrt{10}\\0&x+1&-2\\-\frac{\sqrt{10}}{2}x&2x&x\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}x-7&2\sqrt{10}&-\sqrt{10}\\-\sqrt{10}&x+5&-2\\0&0&1\end{vmatrix}$

$=x(x^2-2x-15)=x(x-5)(x+3)$

よって. Aの固有値は 0. 5. −3

$A\to\begin{bmatrix}2&0&\sqrt{10}\\0&-1&2\\\sqrt{10}&0&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&0&\sqrt{10}\\0&1&-2\\1&0&\frac{\sqrt{10}}{2}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&\frac{\sqrt{10}}{2}\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$ より. $W(0;A)=\left\{a\begin{bmatrix}-\sqrt{10}\\4\\2\end{bmatrix}\middle| a\in\mathbb{R}\right\}$

$A-5E_3=\begin{bmatrix}-3&0&\sqrt{10}\\0&-6&2\\\sqrt{10}&2&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&0&-\sqrt{10}\\0&3&-1\\3\sqrt{10}&6&-12\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&0&-\sqrt{10}\\0&3&-1\\3\sqrt{10}&0&-10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&0&-\sqrt{10}\\0&3&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$ より.

$W(5;A)=\left\{b\begin{bmatrix}\sqrt{10}\\1\\3\end{bmatrix}\middle| b\in\mathbb{R}\right\}$

$A+3E_3=\begin{bmatrix}5&0&\sqrt{10}\\0&2&2\\\sqrt{10}&2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}5&0&\sqrt{10}\\0&1&1\\\sqrt{10}&0&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}5&0&\sqrt{10}\\0&1&1\\1&0&\sqrt{10}/5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&\frac{\sqrt{10}}{5}\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ より.

$W(-3;A)=\left\{c\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{5}\\-\sqrt{5}\end{bmatrix}\middle| c\in\mathbb{R}\right\}$.

$\begin{bmatrix}-\sqrt{10}\\4\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\sqrt{10}\\1\\3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{5}\\-\sqrt{5}\end{bmatrix}$ はそれぞれ直交するので.

$u_1=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}-\sqrt{10}\\4\\2\end{bmatrix}$, $u_2=\frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{bmatrix}\sqrt{10}\\1\\3\end{bmatrix}$, $u_3=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{5}\\-\sqrt{5}\end{bmatrix}$ とおき. $P=[u_1\ u_2\ u_3]$ とすれば.

${}^tP\cdot A\cdot P=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&5&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$ と対角化される〃

(4) $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&-1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ とおくと. $g_A(x)=\begin{vmatrix}x-1&1&0\\1&x+1&-1\\0&-1&x-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-1&0&x-1\\1&x+1&-1\\0&-1&x-1\end{vmatrix}=(x-1)\begin{vmatrix}1&0&0\\1&x+1&-2\\0&-1&x-1\end{vmatrix}$

$=(x-1)(x^2-3)=(x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

よって. Aの固有値は 1. $\sqrt{3}$. $-\sqrt{3}$

$A-E_3=\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&-2&1\\0&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ ∴ $W(1;A)=\left\{c_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\middle| c_1\in\mathbb{R}\right\}$

$A-\sqrt{3}E_3=\begin{bmatrix}1-\sqrt{3}&-1&0\\-1&-1-\sqrt{3}&1\\0&1&1-\sqrt{3}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1-\sqrt{3}&0&1-\sqrt{3}\\1&1+\sqrt{3}&-1\\0&1&1-\sqrt{3}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1+\sqrt{3}&-2\\0&1+\sqrt{3}&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1-\sqrt{3}\\0&0&0\end{bmatrix}$

よって. $W(\sqrt{3};A)=\left\{c_2\begin{bmatrix}-1\\\sqrt{3}-1\\1\end{bmatrix}\middle| c_2\in\mathbb{R}\right\}$

1-(4) つづき

$$A+\sqrt{3}E_3=\begin{bmatrix}1+\sqrt{3} & -1 & 0\\ -1 & -1+\sqrt{3} & 1\\ 0 & 1 & 1+\sqrt{3}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+\sqrt{3} & 0 & 1+\sqrt{3}\\ -1 & -1+\sqrt{3} & 1\\ 0 & 1 & 1+\sqrt{3}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1+\sqrt{3} & 2\\ 0 & -1+\sqrt{3} & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1+\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

よって $W(-\sqrt{3};A)=\left\{c_3\begin{bmatrix}1\\1+\sqrt{3}\\-1\end{bmatrix}\ \middle|\ c_3\in\mathbb{R}\right\}$

$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\\sqrt{3}-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\\sqrt{3}+1\\-1\end{bmatrix}$ は直交するので、$u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $u_2=\frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}\begin{bmatrix}-1\\\sqrt{3}-1\\1\end{bmatrix}$, $u_3=\frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}}\begin{bmatrix}1\\\sqrt{3}+1\\-1\end{bmatrix}$

とおいて $P=[u_1\ u_2\ u_3]$ とすれば、${}^tP\cdot A\cdot P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}$ と対角化される。//

2. (1) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 4 & -1\end{bmatrix}$ とおくと、$g_A(t)=\begin{vmatrix}t-1 & -2 & 0\\ 0 & t-2 & 0\\ 2 & -4 & t+1\end{vmatrix}=(t+1)\begin{vmatrix}t-1 & -2\\ 0 & t-2\end{vmatrix}=(t+1)(t-1)(t-2)$

ゆえに、Aの固有値は 1, 2, -1 と全て実数である。

$A-E_3=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 4 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $A-2E_3=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 4 & -3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$A+E_3=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ -2 & 4 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ となるので、

$\mathbb{R}^3$の基 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ を正規直交化する。

$v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $v_2=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$, $v_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ とおき、$u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

$v_2'=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ よって $u_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$v_3'=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ よって $u_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$

ゆえに、$P=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1\\ 0 & \sqrt{2} & -2\\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1\end{bmatrix}$ とおくと、Pは直交行列で

$${}^tP\cdot A\cdot P=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 4 & -1\end{bmatrix}P=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}3\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & \sqrt{3}\\ -\sqrt{2} & 8\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1\\ 0 & \sqrt{2} & -2\\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6 & 2\sqrt{6} & 8\sqrt{3}\\ 0 & 12 & -18\sqrt{2}\\ 0 & 0 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2/\sqrt{6} & 4/\sqrt{3}\\ 0 & 2 & -3\sqrt{2}\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$ となり上三角化できた。//

(2) $A=\begin{bmatrix}5&-3&6\\2&0&6\\-4&4&-1\end{bmatrix}$ とおくと、$g_A(t)=\begin{vmatrix}t-5&3&-6\\-2&t&-6\\4&-4&t+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-3&-t+3&0\\-2&t&-6\\4&-4&t+1\end{vmatrix}=(t-3)\begin{vmatrix}1&0&0\\-2&t-2&-6\\4&0&t+1\end{vmatrix}$

$=(t-2)(t-3)(t+1)$

ゆえに、Aの固有値は $2, 3, -1 \in \mathbb{R}$

$A-2E_3=\begin{bmatrix}3&-3&6\\2&-2&6\\-4&4&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2\\1&-1&3\\4&-4&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&0&1\\0&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

$A-3E_3=\begin{bmatrix}2&-3&6\\2&-3&6\\-4&4&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-3&6\\1&-1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&-1&4\\1&-1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&-4\\0&0&0\end{bmatrix}$

$A+E_3=\begin{bmatrix}6&-3&6\\2&1&6\\-4&4&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&-6&-12\\2&1&6\\1&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&2\\0&3&6\\1&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$

ここで $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}\right\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底かつAの固有ベクトルでこれらを正規直交化する。

$v_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$ とおくと、$u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

$v_2'=\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}-\frac{7}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$ よって $u_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$

$v_3'=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}-\frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}$ よって $u_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}$

ゆえに、$P=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&-1&-\sqrt{2}\\\sqrt{3}&1&\sqrt{2}\\0&2&-\sqrt{2}\end{bmatrix}$ とすれば、Pは直交行列で、

${}^tP\cdot A\cdot P=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&\sqrt{3}&0\\-1&1&2\\-\sqrt{2}&\sqrt{2}&-\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-3&6\\2&0&6\\-4&4&-1\end{bmatrix}\cdot P=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}7\sqrt{3}&-3\sqrt{3}&12\sqrt{3}\\-11&11&-2\\\sqrt{2}&-\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{bmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&-1&-\sqrt{2}\\\sqrt{3}&1&\sqrt{2}\\0&2&-\sqrt{2}\end{bmatrix}\right)$

$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}12&14\sqrt{3}&-22\sqrt{6}\\0&18&24\sqrt{2}\\0&0&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&14/\sqrt{3}&-22/\sqrt{6}\\0&3&4\sqrt{2}\\0&0&-1\end{bmatrix}$

3. n次の実正方行列Aが直交行列Pによって対角化されると仮定すると、

${}^tP\cdot A\cdot P=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&0\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\0&&&\lambda_n\end{bmatrix}$ をみたす（$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ はAの固有値で全て実数）

ここで、$D=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&0\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\0&&&\lambda_n\end{bmatrix}$ とすると、${}^tP\cdot A\cdot P=D$ で両辺の左側からPを、右側から ${}^tP$ をかけると、

(左辺) $=P({}^tP\cdot A\cdot P)\cdot{}^tP=(P\cdot{}^tP)A\cdot(P\cdot{}^tP)=E_n\cdot A\cdot E_n=A$

(右辺) $=P\cdot D\,{}^tP$

また、Dは対角行列より、${}^tD=D$

$A=P\cdot D\,{}^tP$ より、両辺の転置をとると、${}^tA={}^t(P\cdot D\,{}^tP)={}^t({}^tP)\cdot{}^tD\cdot{}^tP=P\cdot D\cdot{}^tP=A$.

すなわち、Aは(実)対称行列である。

(3のつづき)

Aが実対称行列ならば、Aはある直交行列によって対角化されるということは、定理6.3.1及び定理6.3.2を用いて定理6.3.3(P.125)で証明されている。

4. 仮定より $A\mathbb{u}=\lambda\mathbb{u}$ かつ $A\mathbb{v}=\mu\mathbb{v}$ $(\lambda\neq\mu)$ となる $\mathbb{u},\mathbb{v}\in\mathbb{R}^n-\{\mathbb{0}\}$ が存在し、

$$\lambda(\mathbb{u},\mathbb{v})=(\lambda\mathbb{u},\mathbb{v})=(A\mathbb{u},\mathbb{v})={}^t(A\mathbb{u})\cdot\mathbb{v}={}^t\mathbb{u}\cdot{}^tA\cdot\mathbb{v}={}^t\mathbb{u}\cdot A\mathbb{v}=(\mathbb{u},A\mathbb{v})=(\mathbb{u},\mu\mathbb{v})$$
$$=\mu(\mathbb{u},\mathbb{v})$$

ゆえに、$(\lambda-\mu)(\mathbb{u},\mathbb{v})=0$ となるが、$\lambda\neq\mu$ より $(\mathbb{u},\mathbb{v})=0$

したがって、$\mathbb{u}$ と $\mathbb{v}$ は直交する。