問題6.2 (p.120)

1.(1) $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ とおき、例題6.2.1と同様に $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ を求める。

$\mathbf{u}_1=\dfrac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2'=\mathbf{v}_2-(\mathbf{v}_2,\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-\dfrac{2}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

ゆえに、$\mathbf{u}_2=\dfrac{\mathbf{v}_2'}{\|\mathbf{v}_2'\|}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3'=\mathbf{v}_3-(\mathbf{v}_3,\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1-(\mathbf{v}_3,\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-0\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}2-1\\0-1\\0-0\end{bmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ よって、$\mathbf{u}_3=\dfrac{\mathbf{v}_3'}{\|\mathbf{v}_3'\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$

以上より、$\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$ //

(2) こちらも同様に、$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ とおくと、$\mathbf{u}_1=\dfrac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$

$\mathbf{v}_2'=\mathbf{v}_2-(\mathbf{v}_2,\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\dfrac{3}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}2-2\\0-1\\2-1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$ より、$\mathbf{u}_2=\dfrac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2'\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$

$\mathbf{v}_3'=\mathbf{v}_3-(\mathbf{v}_3,\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1-(\mathbf{v}_3,\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}-\dfrac{5}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}-\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}-\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}10\\5\\5\end{bmatrix}+\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}6-10\\12-5-3\\6-5+3\end{bmatrix}=\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}-4\\4\\4\end{bmatrix}=\dfrac{2}{3}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$

ゆえに $\mathbf{u}_3=\dfrac{\mathbf{v}_3'}{\|\mathbf{v}_3'\|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$ 以上から、$\left\{\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ が求める基である。 //

(3) $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{v}_4=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ とおくと、$\mathbf{u}_1=\dfrac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$

$\mathbf{v}_2'=\mathbf{v}_2-(\mathbf{v}_2,\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}-\dfrac{2}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}2-1\\2-1\\0-1\\0-1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$ $\therefore\ \mathbf{u}_2=\dfrac{\mathbf{v}_2'}{\|\mathbf{v}_2'\|}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$

$\mathbf{v}_3'=\mathbf{v}_3-(\mathbf{v}_3,\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1-(\mathbf{v}_3,\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}-\dfrac{2}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}-\dfrac{0}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}2-1\\0-1\\0-1\\2-1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$

$\|\mathbf{v}_3'\|=1$ より、$\mathbf{u}_3=\mathbf{v}_3'=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$

$\mathbf{v}_4'=\mathbf{v}_4-(\mathbf{v}_4,\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1-(\mathbf{v}_4,\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2-(\mathbf{v}_4,\mathbf{u}_3)\mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$

$=\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}4-3\\0-1\\0+1\\0-1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$ よって、$\mathbf{u}_4=\dfrac{\mathbf{v}_4'}{\|\mathbf{v}_4'\|}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$

1-(3)のつづき

ゆえに $\left\{\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ が求める基である。〃

(4) $\mathbb{V}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}, \mathbb{V}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}, \mathbb{V}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \mathbb{V}_4=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ とおけば、$u_1=\frac{\mathbb{V}_1}{\|\mathbb{V}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$

$\mathbb{V}_2'=\mathbb{V}_2-(\mathbb{V}_2,u_1)u_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0+1\\2-1\\-2\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\0\end{bmatrix}$ $\therefore u_2=\frac{\mathbb{V}_2'}{\|\mathbb{V}_2'\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\0\end{bmatrix}$

$\mathbb{V}_3'=\mathbb{V}_3-(\mathbb{V}_3,u_1)u_1-(\mathbb{V}_3,u_2)u_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\3\end{bmatrix}$ $\therefore u_3=\frac{\mathbb{V}_3'}{\|\mathbb{V}_3'\|}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\3\end{bmatrix}$

$\mathbb{V}_4'=\mathbb{V}_4-(\mathbb{V}_4,u_1)u_1-(\mathbb{V}_4,u_2)u_2-(\mathbb{V}_4,u_3)u_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\3\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}3\\3\\3\\-3\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$

ゆえに、$u_4=\frac{\mathbb{V}_4'}{\|\mathbb{V}_4'\|}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 以上より、$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\3\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ が求める基〃

2. (1) $V_1(x)=1, V_2(x)=x, V_3(x)=x^2$ とおき、正規直交基 $\{u_1(x), u_2(x), u_3(x)\}$ を求める。
(以降は $V_i(x)=V_i$、$u_i(x)=u_i$ と省略します)

$\|V_1\|^2=\int_{-1}^{1}1^2dx=[x]_{-1}^{1}=2$ より、$u_1=\frac{V_1}{\|V_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$(V_2,u_1)=\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}dx=\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}x^2\right]_{-1}^{1}=0$

よって、$V_2'=V_2-(V_2,u_1)u_1=x-0\cdot u_1=x$ で、$\|V_2'\|^2=\int_{-1}^{1}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$

$\therefore u_2=\frac{V_2}{\|V_2'\|}=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot x=\frac{\sqrt{6}}{2}x$

$(V_3,u_1)=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}dx=\left[\frac{x^3}{3\sqrt{2}}\right]_{-1}^{1}=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $(V_3,u_2)=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x\,dx=0$

ゆえに、$V_3'=V_3-(V_3,u_1)u_1-(V_3,u_2)u_2=x^2-\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-0\cdot u_2=x^2-\frac{1}{3}$

また、$\|V_3'\|^2=\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{1}{3})^2dx=\int_{-1}^{1}(x^4-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9})dx=2\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2}{9}x^3+\frac{1}{9}x\right]_0^1=\frac{8}{45}$ より、

$u_3=\frac{V_3'}{\|V_3'\|}=\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2-\frac{1}{3})=\frac{3\sqrt{10}}{4}(x^2-\frac{1}{3})=\frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-1)$

よって、$\{u_1,u_2,u_3\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6}}{2}x, \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-1)\right\}$ が求める基〃

(2) $V_1 = 1+x,\ V_2 = x+x^2,\ V_3 = 1$ とおくと、$\|V_1\|^2 = \int_{-1}^{1}(1+x)^2 dx = \left[\frac{1}{3}(1+x)^3\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$

$\therefore u_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(1+x) = \frac{\sqrt{6}}{4}(1+x)$

$(V_2, u_1) = \int_{-1}^{1}(x+x^2)\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}(1+x)dx = \frac{\sqrt{6}}{4}\int_{-1}^{1}(x^3+2x^2+x)dx = 2\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}\int_0^1 2x^2 dx$
$= \sqrt{6}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$

ゆえに、$V_2' = V_2 - (V_2, u_1)u_1 = (x+x^2) - \frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}(1+x) = \frac{1}{2}(-1+x+2x^2)$

また、$\|V_2'\|^2 = \int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(-1+x+2x^2)^2 dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(1-2x-3x^2+4x^3+4x^4)dx$
$= \frac{1}{4}\cdot 2\int_0^1(1-3x^2+4x^4)dx = \frac{1}{2}\left[x-x^3+\frac{4}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{2}{5}$

ゆえに、$u_2 = \frac{V_2'}{\|V_2'\|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}(-1+x+2x^2) = \frac{\sqrt{10}}{4}(-1+x+2x^2)$

$(V_3, u_1) = \int_{-1}^{1} 1\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}(1+x)dx = \left[\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{1}{2}(1+x)^2\right]_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$(V_3, u_2) = \int_{-1}^{1} 1\cdot\frac{\sqrt{10}}{4}(-1+x+2x^2)dx = \frac{\sqrt{10}}{4}\cdot 2\int_0^1(-1+2x^2)dx = \frac{\sqrt{10}}{2}\left[-x+\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = -\frac{\sqrt{10}}{6}$

したがって、$V_3' = V_3 - (V_3, u_1)u_1 - (V_3, u_2)u_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}(1+x) - \left(-\frac{\sqrt{10}}{6}\right)\frac{\sqrt{10}}{4}(-1+x+2x^2)$
$= \frac{1}{6}(-1-2x+5x^2)$

また、$\|V_3'\|^2 = \int_{-1}^{1}\frac{1}{36}(-1-2x+5x^2)^2 dx = \frac{1}{36}\int_{-1}^{1}(1+4x-6x^2-20x^3+25x^4)dx$
$= 2\cdot\frac{1}{36}\int_0^1(1-6x^2+25x^4)dx = \frac{1}{18}\left[x-2x^3+5x^5\right]_0^1 = \frac{2}{9}$

$\therefore u_3 = \frac{V_3'}{\|V_3'\|} = \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{6}(-1-2x+5x^2) = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1-2x+5x^2)$

以上から、$\{u_1, u_2, u_3\} = \left\{\frac{\sqrt{6}}{4}(1+x),\ \frac{\sqrt{10}}{4}(-1+x+2x^2),\ \frac{\sqrt{2}}{4}(-1-2x+5x^2)\right\}$ が求める基。

3. (1) $P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0 & 2\\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1\\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$ とおき、${}^tP\cdot P = E_3$ を示す。

${}^tP\cdot P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3}\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0 & 2\\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1\\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2+2+2 & \sqrt{6}-\sqrt{6} & 2\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{2}\\ \sqrt{6}-\sqrt{6} & 3+3 & -\sqrt{3}+\sqrt{3}\\ 2\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{2} & -\sqrt{3}+\sqrt{3} & 4+1+1\end{bmatrix}$

$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = E_3$ よって、Pは直交行列である。

(2) 定理6.2.5を用いて示す

$$u_1=\begin{bmatrix}\cos\phi\\ \cos\theta\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi\end{bmatrix},\ u_2=\begin{bmatrix}-\sin\phi\\ \cos\theta\cos\phi\\ \sin\theta\cos\phi\end{bmatrix},\ u_3=\begin{bmatrix}0\\ -\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$$ とおく。

$$(u_1,u_1)=\cos^2\phi+\cos^2\theta\sin^2\phi+\sin^2\theta\sin^2\phi=\cos^2\phi+(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\sin^2\phi=\cos^2\phi+\sin^2\phi=1$$

$$(u_2,u_2)=\sin^2\phi+\cos^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\theta\cos^2\phi=\sin^2\phi+(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\cos^2\phi=\sin^2\phi+\cos^2\phi=1$$

$$(u_3,u_3)=0^2+\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$(u_1,u_2)=-\cos\phi\sin\phi+\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi+\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi=-\sin\phi\cos\phi+\sin\phi\cos\phi=0$$

$$(u_1,u_3)=(\cos\phi)\cdot 0-\sin\theta\cos\theta\sin\phi+\sin\theta\cos\theta\sin\phi=0$$

$$(u_2,u_3)=(-\sin\phi)\cdot 0-\sin\theta\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\cos\theta\cos\phi=0$$

以上より、$(u_i,u_j)=\delta_{ij}$ $(1\leq i,j\leq 3)$ をみたすので、$\{u_1,u_2,u_3\}$は正規直交基底

∴ 定理6.2.5 (P.114) より $[u_1\ u_2\ u_3]$は直交行列〃

4. (1) $Q=\begin{bmatrix}a&-b&-c\\ a&b&-c\\ a&0&2c\end{bmatrix}$ とおき、${}^tQ\cdot Q=E_3$ をみたす a.b.c を求める。

$${}^tQ\cdot Q=\begin{bmatrix}a&a&0\\ -b&b&0\\ -c&-c&2c\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a&-b&-c\\ a&b&-c\\ a&0&2c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a^2&0&0\\ 0&2b^2&0\\ 0&0&6c^2\end{bmatrix}$$ で、${}^tQ\cdot Q=E_3$とすると

$3a^2=2b^2=6c^2=1$ より、$a=\pm\frac{1}{\sqrt3}$, $b=\pm\frac{1}{\sqrt2}$, $c=\pm\frac{1}{\sqrt6}$ となるので、

$(a.b.c)=(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt6}),(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt6}),(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt6}),(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt6}),$
$(\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt6}),(\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt6}),(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt6}),(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt6})$

の8通り全ての組でQは直交行列になる〃

(2) $R=\begin{bmatrix}a&2a&a\\ b&0&-b\\ c&-c&c\end{bmatrix}$ とおき ${}^tR\cdot R=E_3$ をみたす a.b.c を求める。

$${}^tR\cdot R=\begin{bmatrix}a&b&c\\ 2a&0&-c\\ a&-b&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&2a&a\\ b&0&-b\\ c&-c&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+b^2+c^2&2a^2-c^2&a^2-b^2+c^2\\ 2a^2-c^2&4a^2+c^2&2a^2-c^2\\ a^2-b^2+c^2&2a^2-c^2&a^2+b^2+c^2\end{bmatrix}$$, ${}^tR\cdot R=E_3$とすると

$a^2+b^2+c^2=1$, $2a^2-c^2=0$, $a^2-b^2+c^2=0$, $4a^2+c^2=1$ がえられる。

これを解くと、$a^2=\frac{1}{6}$, $b^2=\frac{1}{2}$, $c^2=\frac{1}{3}$ より $a=\pm\frac{1}{\sqrt6}$, $b=\pm\frac{1}{\sqrt2}$, $c=\pm\frac{1}{\sqrt3}$

∴ $(a.b.c)=(\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt3}),(-\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt3}),(\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt3}),(\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt3})$
$(-\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt3}),(-\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt3}),(\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt3}),(-\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt3})$

の8通り全てで R は直交行列となる。//

5. P が n 次の直交行列ならば、${}^tP\cdot P=E_n$ より、$P^{-1}={}^tP$ である。ここで、${}^t(P^{-1})={}^t({}^tP)=P$ より、

$${}^t(P^{-1})\cdot(P^{-1})=P\cdot P^{-1}=E_n$$ となるので、P^{-1} も直交行列 //

6. P, Q が n 次の直交行列ならば、${}^tP\cdot P=E_n$ かつ ${}^tQ\cdot Q=E_n$ をみたす。
ここで ${}^t(PQ)\cdot(PQ)=({}^tQ\cdot{}^tP)\cdot(P\cdot Q)={}^tQ({}^tP\cdot P)\cdot Q={}^tQ\cdot E_n\cdot Q={}^tQ\cdot Q=E_n$
となるので、PQ も直交行列 //

7. $$\frac{1}{2}\{\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\}=\frac{1}{2}\{(u+v,u+v)-(u,u)-(v,v)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(u,u+v)+(v,u+v)-(u,u)-(v,v)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(u,u)+(u,v)+(v,u)+(v,v)-(u,u)-(v,v)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(u,v)+(u,v)\}=(u,v)$$ //

8. ($\Rightarrow$) T が直交変換ならば、定義より、$\forall u, \forall v\in V$ に対し $(T(u),T(v))=(u,v)$
をみたすので、とくに、$v=u$ とすれば、$(T(u),T(u))=(u,u)$
すなわち、$\|T(u)\|^2=\|u\|^2$ で、$\|T(u)\|, \|u\|\geq 0$ より、$\|T(u)\|=\|u\|$ ($\forall u\in V$)

($\Leftarrow$) 7の等式を用いて示す。$\forall u, \forall v\in V$ に対し、
$$(T(u),T(v))=\frac{1}{2}\{\|T(u)+T(v)\|^2-\|T(u)\|^2-\|T(v)\|^2\}$$ ← $(T(u)+T(v)=T(u+v))$
$$=\frac{1}{2}\{\|T(u+v)\|^2-\|T(u)\|^2-\|T(v)\|^2\}$$
$$=\frac{1}{2}\{\|(u+v)\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\}=(u,v)$$
T の線形性と仮定 $\|T(x)\|=\|x\|$ ($\forall x\in V$) も用いた。