問題6.1 (P.115)

1. (1) $\left(\begin{bmatrix}2\\4\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\-2\\4\end{bmatrix}\right) = 2\cdot3+4(-2)+(-1)\cdot4 = 6-8-4=-6$ //

(2) $\left(\begin{bmatrix}-1\\3\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\-2\\-7\end{bmatrix}\right) = (-1)\cdot5+3(-2)+(-2)(-7) = -5-6+14=3$ //

(3) $(f,g)=(2+x-x^2,\ 1-x+x^2)=\int_{-1}^{1} (2+x-x^2)(1-x+x^2)\,dx = \int_{-1}^{1}(2-x+2x^3-x^4)\,dx$

$$=\left[2x-\frac12x^2+\frac12x^4-\frac15x^5\right]_{-1}^{1} = 2\cdot2-\frac15\cdot2=\frac{18}{5}$$ //

2. (1) $u=\begin{bmatrix}1\\-4\\-1\end{bmatrix}$, $\|u\|=\sqrt{(u,u)}=\sqrt{1^2+(-4)^2+(-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt2$ //

(2) $u=\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\|u\|=\sqrt{(u,u)}=\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$ //

(3) $f=2+x-x^2$. $(f,f)=\int_{-1}^{1}(2+x-x^2)^2\,dx=\int_{-1}^{1}(x^4-2x^3-3x^2+4x+4)\,dx$

$$=2\cdot\int_{0}^{1}(x^4-3x^2+4)\,dx = 2\left[\frac{x^5}{5}-x^3+4x\right]_{0}^{1}=\frac{32}{5}$$

ゆえに、$\|f\|=\sqrt{(f,f)}=\sqrt{\frac{32}{5}}=\frac{4\sqrt2}{\sqrt5}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$ //

3. $\begin{bmatrix}1\\a\\-1\end{bmatrix}\perp\begin{bmatrix}3\\-2\\a\end{bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{bmatrix}1\\a\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\-2\\a\end{bmatrix}\right)=0$ で、(左辺)$=1\cdot3+a(-2)+(-1)\cdot a=-3a+3$ より。

$-3a+3=0$ ゆえに、$a=1$ とすれば ${}^t[1\ \ a\ \ -1]$ と ${}^t[3\ \ -2\ \ a]$ は直交する。//

4. $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ とおき $\left(x,\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right)=0$, $\left(x,\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}\right)=0$ かつ $\|x\|=1$ となる xを求める。

$\left(x,\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right)=x_1+x_2-x_3$, $\left(x,\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}\right)=2x_1-2x_2+x_3$, $\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ より。

$x_1+x_2-x_3=0$, $2x_1-2x_2+x_3=0$ を用いると、$x_2=3x_1$, $x_3=4x_1$ が得られるので、
$\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=1$ に代入すると、$\sqrt{x_1^2+9x_1^2+16x_1^2}=\sqrt{26x_1^2}=1$ すなわち、$x_1^2=\frac{1}{26}$ なので、
$x_1=\pm\frac{1}{\sqrt{26}}$ よって $x_2=\pm\frac{3}{\sqrt{26}}$, $x_3=\pm\frac{4}{\sqrt{26}}$

以上より、求めるベクトルは $x=\pm\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}$ //

別解) 外積を用いても可

$\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}1&-1\\-2&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&1\\2&-2\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-3\\-4\end{bmatrix}$ で、$\left\|\begin{bmatrix}-1\\-3\\-4\end{bmatrix}\right\|=\sqrt{26}$ より。

$\pm\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}$ //

5. (1) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v})+(\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v})$

$=\{(\mathbf{u},\mathbf{u}+\mathbf{v})+(\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v})\}+\{(\mathbf{u},\mathbf{u}-\mathbf{v})+(-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v})\}$

$=\{(\mathbf{u},\mathbf{u})+(\mathbf{u},\mathbf{v})+(\mathbf{v},\mathbf{u})+(\mathbf{v},\mathbf{v})\}+\{(\mathbf{u},\mathbf{u})+(\mathbf{u},-\mathbf{v})+(-\mathbf{v},\mathbf{u})+(-\mathbf{v},-\mathbf{v})\}$

$=(\mathbf{u},\mathbf{u})+(\mathbf{v},\mathbf{v})+(\mathbf{u},\mathbf{v})+(\mathbf{v},\mathbf{u})+(\mathbf{u},\mathbf{u})-(\mathbf{u},\mathbf{v})-(\mathbf{v},\mathbf{u})+(-1)^2(\mathbf{v},\mathbf{v})$

$=2\{(\mathbf{u},\mathbf{u})+(\mathbf{v},\mathbf{v})\}$

$=2(\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2)$ // (P.112の内積の4条件とノルムの定義を用いる)

(2) (⇒) $\mathbf{u}$と$\mathbf{v}$が直交するならば, $(\mathbf{u},\mathbf{v})=0$ となる。

$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v})=(\mathbf{u},\mathbf{u})+2\underbrace{(\mathbf{u},\mathbf{v})}_{=0}+(\mathbf{v},\mathbf{v})=(\mathbf{u},\mathbf{u})+2\cdot 0+(\mathbf{v},\mathbf{v})$

$=\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2$

(⇐) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=(\mathbf{u},\mathbf{u})+2(\mathbf{u},\mathbf{v})+(\mathbf{v},\mathbf{v})=\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2+2\cdot(\mathbf{u},\mathbf{v})$ より.

$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2$ とするならば, $2\cdot(\mathbf{u},\mathbf{v})=0$ すなわち, $(\mathbf{u},\mathbf{v})=0$

よって, このとき, $\mathbf{u}$と$\mathbf{v}$は直交する//

(3) (⇒) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\perp(\mathbf{u}-\mathbf{v})$ ならば, $(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v})=0$

ここで, $(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v})=(\mathbf{u},\mathbf{u}-\mathbf{v})+(\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v})$

$=(\mathbf{u},\mathbf{u})-(\mathbf{u},\mathbf{v})+(\mathbf{v},\mathbf{u})-(\mathbf{v},\mathbf{v})$

$=(\mathbf{u},\mathbf{u})-(\mathbf{u},\mathbf{v})+(\mathbf{u},\mathbf{v})-(\mathbf{v},\mathbf{v})$

$=\|\mathbf{u}\|^2-\|\mathbf{v}\|^2$

ゆえに, $\|\mathbf{u}\|^2-\|\mathbf{v}\|^2=0$ となるので, $\|\mathbf{u}\|^2=\|\mathbf{v}\|^2$

(⇐) $(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v})=\|\mathbf{u}\|^2-\|\mathbf{v}\|^2$ だから, $\|\mathbf{u}\|=\|\mathbf{v}\|$ とすると, $(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v})=0$

よって, このとき, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$と$\mathbf{u}-\mathbf{v}$は直交する//

6. $\mathbf{0}\in V$, $\forall\mathbf{v}\in W$ に対し, $(\mathbf{0},\mathbf{v})=0$ より, $\mathbf{0}\in W^\perp$

$\mathbf{x},\mathbf{y}\in W^\perp$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ と $\forall\mathbf{v}\in W$ に対し,

$(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y},\mathbf{v})=(\alpha\mathbf{x},\mathbf{v})+(\beta\mathbf{y},\mathbf{v})=\alpha(\mathbf{x},\mathbf{v})+\beta(\mathbf{y},\mathbf{v})$

ここで, 今, $\mathbf{x},\mathbf{y}\in W^\perp$, $\mathbf{v}\in W$ としているので, $(\mathbf{x},\mathbf{v})=(\mathbf{y},\mathbf{v})=0$

したがって, $(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y},\mathbf{v})=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0$ $\therefore\ \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\in W^\perp$

以上より, $W^\perp$はVの部分空間である//

7. (1) $\forall\mathbf{x}\in W\cap W^\perp$ とすると, $\mathbf{x}\in W$ かつ $\mathbf{x}\in W^\perp$ よって, 直交補空間の性質より,

$(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$ となるが, もし, $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ とすると, 内積の性質から $(\mathbf{x},\mathbf{x})>0$ となり,

矛盾する。したがって, $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 今, $\mathbf{x}$は任意なので, $W\cap W^\perp=\{\mathbf{0}\}$ である//

(2) ($\Rightarrow$) $x \in W_2^{\perp}$とすると、${}^{\forall} w_2 \in W_2$に対し、$(x, w_2) = 0$　今、$W_1 \subset W_2$を仮定しているので、${}^{\forall} w_1 \in W_1$ とすると、$w_1 \in W_2$ より、$(x, w_1) = 0$ をみたす。
よって、xはW_1の任意のベクトルと直交するので、$x \in W_1^{\perp}$　ゆえに、$W_2^{\perp} \subset W_1^{\perp}$

($\Leftarrow$) $x \in W_1$とすると、${}^{\forall} w_1' \in W_1^{\perp}$に対し、$(x, w_1') = 0$　仮定 $W_2^{\perp} \subset W_1^{\perp}$ より
${}^{\forall} w_2' \in W_2^{\perp}$に対し、$w_2' \in W_1^{\perp}$ ゆえに、$(x, w_2') = 0$
これはxが$W_2^{\perp}$の任意のベクトルと直交することを意味するので、$x \in W_2$
したがって、$W_1 \subset W_2$ //

8. まず、$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$を解く。$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ より、

$$W = \left\{ c \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$$

ここで、$u \in W^{\perp}$とすると ${}^{\forall} x \in W$ に対し、$(u, x) = 0$ となるので、
特に、$x = {}^t[5\ -3\ 1]$ とすればよい。$u = {}^t[u_1\ u_2\ u_3]$ とおけば、
$5u_1 - 3u_2 + u_3 = 0$ が得られ、

$$W^{\perp} = \left\{ u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| 5u_1 - 3u_2 + u_3 = 0 \right\}$$ とできるので、これを解けば

$$W^{\perp} = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$ //

（実は、$W^{\perp} = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$でも良い）

一般に $\mathbb{R}$上 n次元内積空間Vの部分空間Wに対し、Wが
$W = \{ c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_k a_k \mid c_i \in \mathbb{R} \}$ と表されているとき、このWに対する直交補空間$W^{\perp}$を求めたい。（$\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$は$W$の生成系である。）

このとき、${}^{\forall} a_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$に対し、$(u, a_i) = 0$となるような$u \in V$を求めればよい。

(∵) ${}^{\forall} x \in W$とすると、$x = c_1 a_1 + \cdots + c_k a_k$と表されるので、上の$u$に対し、内積をとると、
$$(u, x) = (u, c_1 a_1 + \cdots + c_k a_k) = c_1 (u, a_1) + \cdots + c_k (u, a_k)$$
$$= c_1 \cdot 0 + \cdots + c_k \cdot 0 = 0$$ となる。
つまり、uは任意のWのベクトルと直交しているので、$u \in W^{\perp}$

上の問題はこれの簡単な例である。