Date . .

P.111 1.

(3) $g_A(t) = (t-2)^2 - 3$ より 固有値は $2 \pm \sqrt{3}$.

固有値 $2+\sqrt{3}$ に対し

$$\begin{bmatrix} 2-(2+\sqrt{3}) & -3 \\ -1 & 2-(2+\sqrt{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より 固有ベクトルは ${}^t[-\sqrt{3}, 1]$ の定数倍となる.

固有値 $2-\sqrt{3}$ に対し

$$\begin{bmatrix} 2-(2-\sqrt{3}) & -3 \\ -1 & 2-(2-\sqrt{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -3 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より 固有ベクトルは ${}^t[\sqrt{3}, 1]$ の定数倍となる.

上の計算結果を用いて $P = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ と置けば $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$ //

(5) $g_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 & -2 \\ -1 & t & -2 \\ 2 & -2 & t+1 \end{vmatrix} \underset{[1]+[2]}{=} \begin{vmatrix} t-1 & 1 & -2 \\ t-1 & t & -2 \\ 0 & -2 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & t & -2 \\ 0 & -2 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & -2 & t+1 \end{vmatrix}$

$= (t-1)\cdot\begin{vmatrix} t-1 & 0 \\ -2 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1)^2\cdot(t+1)$

これより Aの固有値は 1(重複度2), −1. 固有値 1 に対する固有空間は

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より $W(1:A) = \left\{ c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$, 特に $\dim W(1:A) = 1$ となる. 固有値 −1 に対する固有空間は

$$\begin{bmatrix} 2-(-1) & -1 & 2 \\ 1 & -(-1) & 2 \\ -2 & 2 & -1-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より $W(-1:A) = \left\{ c\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$. 特に $\dim W(-1:A) = 1$ となる.

上の計算結果より $\dim W(1:A) + \dim W(-1:A) = 2 < 3$. 定理 5.4.2 より A は対角化できない.

(4) $g_A(t) = \begin{vmatrix} t+3 & 2 & 2 \\ -4 & t-3 & -2 \\ -8 & -4 & t-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & t-1 & 0 \\ -4 & t-3 & -2 \\ 0 & 2-2t & t-1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} ①+② \\ ③-2\times② \end{pmatrix} = (t-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & t-3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= (t-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & t-3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t-3).$

故に固有値は 1 (重複度2), 3.

固有値1については $A-E = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 0 & \end{bmatrix}$ より $W(1;A) = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$. 固有値3については $A-3E = \begin{bmatrix} -6 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より

$W(3;A) = \left\{ c \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}.$

上の計算より $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ と置けば $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ //

他の行列についても同様なので省略する.

P.111 2

(2) $g_A(t) = \begin{vmatrix} t-13 & 30 \\ -5 & t+12 \end{vmatrix} = t^2-t-6 = (t-3)(t+2).$

$\begin{bmatrix} 13-3 & -30 \\ 5 & -12-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -30 \\ 5 & -15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 13+2 & -30 \\ 5 & -12+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -30 \\ 5 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

より Aの固有値は 3, -2. また各固有値に対する固有ベクトルとして $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ がとれる. そこで $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ と置けば $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ となる.

$$A^n = P\left((P^{-1}AP)^n\right)P^{-1} = P \cdot \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3^{n+1} & -(-2)^{n+1} \\ 3^n & (-2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^{n+1}+(-2)^{n+1} & -2\cdot 3^{n+1}-3\cdot(-2)^{n+1} \\ 3^n-(-2)^n & -2\cdot 3^n+3(-2)^n \end{bmatrix} //$$

(1)も同様なので省略.

P.111 3.

仮定より $B = P^{-1}AP$, $C = Q^{-1}BQ$ となる正則行列 P, Q が存在する. $|PQ| = |P||Q| \neq 0$ より PQ は正則であり $(PQ)^{-1}APQ = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = Q^{-1}BQ = C$ より A と C は同値である. ▨

P.111 4.

λ が A の固有値のとき, $x(\neq 0)$ を λ に対する固有ベクトルだとすると m が十分大きいとき $A^m = O$ より

$$0 = A^m x = A^{m-1}(\lambda x) = A^{m-2}(\lambda^2 x) = \cdots = \lambda^m x$$

$x \neq 0$ より $\lambda^m = 0$, 従って $\lambda = 0$. 故に A の固有値は全て 0 となる. $A \neq O$ という事から $\mathrm{rank}A \neq 0$, よって $\mathrm{null}(A) = n - \mathrm{rank}A < n$, 即ち $\dim W(0:A) < n$ となり 定理 5.4.2 から A は対角化不可能である事が分かる. ▨

P.111 5

行列式 $|tE_n - A|$ の対角成分の積 $(t-a_{11})(t-a_{22})\cdots(t-a_{nn})$ 以外の項は $t-a_{ii}$ という因子を高々$(n-2)$個しか含まない. 従って $|tE_n - A|$ の t に関する展開は

$$|tE_n - A| = (t-a_{11})(t-a_{22})\cdots(t-a_{nn}) + (t\text{に関する}(n-2)\text{次多項式})$$
$$= t^n - (a_{11}+\cdots+a_{nn})t^{n-1} + (t\text{に関する}(n-2)\text{次多項式})$$

という形になり、故に $a_{n-1} = -\mathrm{tr}(A)$ である. 一方, $g_A(0) = |0\cdot E_n - A| = (-1)^n|A|$ より $a_0 = (-1)^n \det(A)$ である. ▨

P.111 6　$A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ とする. ABの(i,j)成分は $\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}$, BAの(i,j)成分は $\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}$ だから

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl}b_{lk}\right) = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{lk}a_{kl}\right) = \mathrm{tr}(BA).$$ ▨

P.111 7　問題6より　$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(P(P^{-1}A)) = \mathrm{tr}A$ ▨

(別解) 行列式の性質と $|P| \neq 0$ より

$$|tE_n - P^{-1}AP| = |tP^{-1}P - P^{-1}AP| = |P^{-1}||tE_n - A||P|$$
$$= |P^{-1}P| \cdot |tE_n - A| = 1 \cdot |tE_n - A| = |tE_n - A|$$

これより特性多項式について $g_{P^{-1}AP}(t) = g_A(t)$. ここで t^{n-1} の係数を比較すれば 問題5より $-\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = -\mathrm{tr}(A)$. 故に $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$. ▨

P.111 8

A が正則だとする. 0 が A の固有値だとすると A の特性多項式 $g_A(t)$ について $g_A(0)=0$ となるが, このとき問題5より $(-1)^n \det(A) = 0$ となるが, これは A が正則である事に反する. 故に 0 は A の固有値ではない.

A の固有値が全て 0 ではないとする. $\det(A)=0$ だとすると $g_A(0)=0$ より 0 が A の固有値となるが, これは仮定に反する. 故に $\det(A) \neq 0$. 即ち A は正則である. ▨

教科書の解答のように固有値の定義を用いてもよい.