Date . .

P.105 1.

(1) $f(A) = 2\cdot\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -4 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -1 \\ -4 & 22 \end{bmatrix}$ //

(別解) $g_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 \\ -4 & t+3 \end{vmatrix} = t^2+t-10$, $f(t) = 2(t^2+t-10) - t + 19$ 及び Cayley-Hamilton

の定理より $f(A) = 2\cdot O - A + 19E = \begin{bmatrix} 17 & -1 \\ -4 & 22 \end{bmatrix}$ //

(2) は同様なので省略.

P.105 2

(1) $g_A(t) = \begin{vmatrix} t+3 & 2 & 2 \\ -4 & t-3 & -2 \\ -8 & -4 & t-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & t-1 & 0 \\ -4 & t-3 & -2 \\ -8 & -4 & t-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ -4 & t+1 & -2 \\ -8 & 4 & t-5 \end{vmatrix}$

$= (t-1)\cdot\begin{vmatrix} t+1 & -2 \\ 4 & t-5 \end{vmatrix} = (t-1)\cdot(t^2-4t+3) = (t-1)^2(t-3)$ //

$g_A(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1, 3$ より A の固有値は 1 (重複度 2), 3 //

(3) $g_A(t) = \begin{vmatrix} t-5 & 3 & -6 \\ -2 & t & -6 \\ 4 & -4 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & -(t-3) & 0 \\ -2 & t & -6 \\ 4 & -4 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & 0 & 0 \\ -2 & t-2 & -6 \\ 4 & 0 & t+1 \end{vmatrix}$

$= (t-3)\cdot\begin{vmatrix} t-2 & -6 \\ 0 & t+1 \end{vmatrix} = (t-3)(t-2)(t+1)$ //

A の固有値は 3, 2, -1 //

(2) $g_A(t) = \begin{vmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ -1 & 0 & t \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} t-1 & 0 \\ 0 & t \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ t-1 & 0 \end{vmatrix} = t^2(t-1) + (t-1)$

$= (t-1)(t^2+1) = (t-1)(t-\sqrt{-1})(t+\sqrt{-1})$ //

A の固有値は $1, \pm\sqrt{-1}$ //

(4) は省略.

Nakabayashi

Date . . .

p.105 3

(2) (i) $g_T(t) = \begin{vmatrix} t-7 & -12 & 0 \\ 2 & t+3 & 0 \\ -2 & -4 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t-7 & -12 \\ 2 & t+3 \end{vmatrix} = (t-1)(t^2-4t+3) = (t-1)^2(t-3)$ //

(ii) (i)の結果より Tの固有値は 1 (重複度2), 3 //

(iii) 固有値 1 について

$$A-E_3 = \begin{bmatrix} 7-1 & 12 & 0 \\ -2 & -3-1 & 0 \\ 2 & 4 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & O & \end{bmatrix}$$

簡約化の結果より $W(1,T) = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$ //

固有値 3 について

$$A-3E_3 = \begin{bmatrix} 7-3 & 12 & 0 \\ -2 & -3-3 & 0 \\ 2 & 4 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

簡約化の結果より $W(3,T) = \left\{ c \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \ c \in \mathbb{R} \right\}$ //

(4) (i) $g_T(t) = \begin{vmatrix} t+1 & 0 & 2 \\ -3 & t-2 & -2 \\ -1 & 1 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & 0 & 2 \\ t-2 & t-2 & 0 \\ -1 & 1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t+1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & t-3 \end{vmatrix}$

$= (t-2)\begin{vmatrix} t+1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t+1 & 2 \\ -2 & t-3 \end{vmatrix} = (t-2)(t^2-2t+1) = (t-1)^2(t-2)$ //

(ii) (i)の結果より Tの固有値は 1 (重複度2), 2 //

(iii) 固有値 1 について

$$A-E_3 = \begin{bmatrix} -1-1 & 0 & -2 \\ 3 & 2-1 & 2 \\ 1 & -1 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

簡約化の結果より $W(1,T) = \left\{ c \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \ c \in \mathbb{R} \right\}$ //

固有値 2 について

$$A-2E_3 = \begin{bmatrix} -1-2 & 0 & -2 \\ 3 & 2-2 & 2 \\ 1 & -1 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

簡約化の結果より $W(2,T) = \left\{ c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \middle| \ c \in \mathbb{R} \right\}$ //

(1)(3)は同様なので省略.

P.105. 4.

(1). $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関するTの表現行列 A は

$$T(1, x, x^2) = (T(1), T(x), T(x^2)) = (1, 1-x, (1-x)^2)$$
$$= (1, 1-x, 1-2x+x^2) = (1, x, x^2)\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \therefore A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(i) $g_T(t) = \begin{vmatrix}t-1 & -1 & -1\\ 0 & t+1 & 2\\ 0 & 0 & t-1\end{vmatrix} = (t-1)^2(t+1)$ //

(ii) (i) の結果より Tの固有値は 1.(重複度2), −1 //

(iii)

∘ $A-E_3 = \begin{bmatrix}1-1 & 1 & 1\\ 0 & -1-1 & -2\\ 0 & 0 & 1-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

簡約化の結果より Aの固有値1に対する固有ベクトルは $c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$ $((c_1, c_2) \neq (0,0))$.

ここで $p_1(x) = (1, x, x^2)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 1$, $p_2(x) = (1, x, x^2)\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} = -x+x^2$ // とすれば Tの固有ベクトルとなる.

故に $W(1; T) = \{c_1p_1 + c_2p_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ //

∘ $A-(-1)E_3 = \begin{bmatrix}1-(-1) & 1 & 1\\ 0 & -1-(-1) & -2\\ 0 & 0 & 1-(-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

簡約化の結果より Aの固有値−1に対する固有ベクトルは $c\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$ $(c \neq 0)$. ここで $p_3(x)$
$= (1, x, x^2)\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix} = -1+2x$ // とすれば. これはTの固有値−1に対する固有ベクトルであり,
$W(-1; T) = \{c\,p_3(x) \mid c \in \mathbb{R}\}$ // となる.

(2) も同様. 省略.

Date . .

p.105 5 $W(\lambda;T)=\{v\in V: Tv=\lambda\cdot v\}$ について 定理4.1.1 (p.64) の条件が成立する事を確かめる.

i) 零ベクトル 0 について $T\cdot 0=\lambda\cdot 0$ が成立するのは明らか. 従って $0\in W(\lambda;T)$.

ii) $v, w\in W(\lambda;T)$ のとき

$$T(v+w)=T(v)+T(w)=\lambda\cdot v+\lambda\cdot w=\lambda(v+w)$$

より $v+w\in W(\lambda;T)$.

iii) $v\in W(\lambda;T)$ 及び スカラー α について

$$T(\alpha\cdot v)=\alpha\cdot T(v)=\alpha\cdot(\lambda v)=\lambda(\alpha\cdot v).$$

より $\alpha\cdot v\in W(\lambda;T)$.

従って $W(\lambda;T)$ は V の部分空間である. //

P.105 6. $g_A(t)=t^2+t+1$ と Cayley-Hamilton の定理 より $A^2+A+E=O$.
これと $t^3-1=(t-1)(t^2+t+1)$ より $A^3-E=O$ となる事も分かる.

(1) $f(t)=(t^3)^6\cdot t^2=(t^3)^6\cdot(t^2+t+1)-(t^3)^6(t+1)$ より $f(A)=-(A+E)=\begin{bmatrix}-3&-1\\7&2\end{bmatrix}$ //

(2) $f(A)=A^{11}+A^7-2E=A^2+A-2E=A^2+A+E-3E=-3E$ //