Date . .

P.97 1.

(2) $\mathbb{R}^4$の基底を$\{p_1, \cdots, p_4\}$, $\mathbb{R}^3$の基底を$\{q_1, \cdots, q_3\}$とする.

$$T(p_1, p_2, p_3, p_4) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & -1 & 9 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \ (= (T(p_1), \cdots, T(p_4)))$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 8 & 10 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 8 & 10 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -11 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 4 \end{array}\right] (②-①)$$

$$\xrightarrow[②+③]{①-③} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 6 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{②\leftrightarrow③} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 6 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -7 & 0 & -7 \end{array}\right]$$

(後半の簡約化の結果より $T(p_1) = 5 \cdot q_1 + 3 \cdot q_2 - 6 q_3$ である事が分かる. 他も同様)

$$\therefore \ T(p_1, \cdots, p_4) = (q_1, \cdots, q_3) \begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ -6 & -7 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

故に与えられた基底に関する表現行列は $\begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ -6 & -7 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ //

(別解) $P = [p_1, \cdots, p_4]$ (4次正方行列), $Q = [q_1, \cdots, q_3]$ (3次正方行列) と置く.

$$[Q|E_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{②-①} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[②+③]{①-③} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{②\leftrightarrow③} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] = [E_3|Q^{-1}]$$

(基底$\{p_1, \cdots, p_4\}$, $\{q_1, \cdots, q_3\}$に関するTの表現行列) $= Q^{-1} \cdot A \cdot P$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ -6 & -7 & 0 & -7 \end{bmatrix} //$$

(1)も同様なので省略.

P.97 2.

(1) $\mathbb{R}^3$の基底を $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ とする.

$$T(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -4 & -4 & -5 \\ 7 & 11 & 13 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \mathbf{p}_3 \mid T(\mathbf{p}_1).\ T(\mathbf{p}_2).\ T(\mathbf{p}_3)] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 11 & 13 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 6 & 9 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 11 & 13 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -11 & -15 & -18 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 11 & 13 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -11 & -15 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 13 & 14 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & -15 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\therefore\ (T(\mathbf{p}_1).\ T(\mathbf{p}_2).\ T(\mathbf{p}_3)) = (-11\mathbf{p}_1 + 8\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3,\ -15\mathbf{p}_1 + 13\mathbf{p}_2 - 2\mathbf{p}_3,\ -18\mathbf{p}_1 + 14\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)$$

$$= (\mathbf{p}_1.\ \mathbf{p}_2.\ \mathbf{p}_3) \begin{bmatrix} -11 & -15 & -18 \\ 8 & 13 & 14 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} /\!/$$

P.97 1(2) の別解のように $P=[\mathbf{p}_1.\mathbf{p}_2.\mathbf{p}_3]$. とし $P^{-1}AP$ を計算してもよい. (2)も同様.

(3) $p_0=1.\ p_1=x,\ p_2=x^2$ とする.

$$T(p_0) = 3 = 3\cdot p_0\ ,\ T(p_1) = 2+3x = 2p_0+3p_1\ ,\ T(p_2) = 4x+3x^2 = 4p_1+3p_2$$

$$\therefore\ T(p_0.p_1.p_2) = (3p_0.\ 2p_0+3p_1.\ 4p_1+3p_2) = (p_0.p_1.p_2) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} /\!/$$

(4) $f_1 = 1+x.\ f_2 = x+x^2.\ f_3 = 1-2x^2$ と置く. このとき $2f_1-2f_2-f_3 = 1.\ -f_1+2f_2+f_3 = x$ 及び

$$T(f_1) = 2+3f_1 = 7f_1-4f_2-2f_3. \qquad T(f_2) = 2+4x+3f_2 = 7f_2+2f_3.$$

$$T(f_3) = -8x+3f_3 = 8f_1-16f_2-5f_3$$

Date . .

より

$$T(f_1, f_2, f_3) = (7f_1-4f_2-2f_3,\ 7f_2+2f_3,\ 8f_1-16f_2-5f_3) = (f_1, f_2, f_3)\begin{bmatrix} 7 & 0 & 8 \\ -4 & 7 & -16 \\ -2 & 2 & -5 \end{bmatrix} //$$

(別解) $(f_1, f_2, f_3) = (p_0, p_1, p_2)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = (p_0, p_1, p_2)P$ と置く (3)の表現行列をA, (4)の表現行列をA'とすれば

$$T(f_1, f_2, f_3) = (f_1, f_2, f_3)A' = (p_0, p_1, p_2)P\cdot A'$$
$$= T((p_0, p_1, p_2)P) = T(p_0, p_1, p_2)P = (p_0, p_1, p_2)A\cdot P$$

より $P\cdot A' = A\cdot P$, $A' = P^{-1}A\cdot P = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 8 \\ -4 & 7 & -16 \\ -2 & 2 & -5 \end{bmatrix} //$

P.97 3

$u, v \in U$, α, β: スカラーとする.

$$(S\cdot T)(\alpha u + \beta\cdot v) = S(T(\alpha u + \beta v)) = S(\alpha Tu + \beta Tv)$$
$$= \alpha\cdot S(Tu) + \beta S(Tv) = \alpha\cdot(S\cdot T)(u) + \beta(S\cdot T)(v)$$

より $S\cdot T$ は U から W への線形写像である. 図

P.97 4.

$c_0 u + c_1 T(u) + \cdots + c_m T^m(u) = 0$ だとする. 両辺に T^{m-1} を掛ければ $c_0 T^m(u) + 0 + \cdots + 0 = 0$ となるが, $T^m(u) \neq 0$ より $c_0 = 0$, 従って $c_1 T(u) + \cdots + c_{m-1} T^m(u) = 0$. この両辺に T^{m-2} を掛ければ $c_1 T^m(u) = 0$. $T^m(u) \neq 0$ より $c_1 = 0$. 従って $c_2 T^2(u) + \cdots + c_{m-1} T^m(u) = 0$ となる….

以上の操作を順に繰り返せば $c_0 = c_1 = \cdots = c_{m-1} = 0$ を得る. 故に $\{u, \cdots, T^m(u)\}$ は1次独立, また $\dim V = n$ だから これが V の基底となる事が分かる (定理4.4.5). 図

Nakabayashi