Date . .

P.91 1 p.64 定理4.1.1の条件を確認すればよい.

(1) ・ $\mathbb{0} \in U$ に対し $T\mathbb{0} = \mathbb{0} \in V$ より $\mathbb{0} \in \mathrm{Im}(T)$

・ $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}(T)$ とする. 定義より $y_i = Tx_i$ $(x_i \in U,\ i=1,2)$ となる x_i がとれる.

$$y_1 + y_2 = Tx_1 + Tx_2 = T(x_1 + x_2) \in \mathrm{Im}(T)$$

より $y_1 + y_2 \in \mathrm{Im}(T)$.

・ $y \in \mathrm{Im}(T)$, α:スカラーとする. y に対し $y = Tx$ となる $x \in U$ をとれば

$$\alpha \cdot y = \alpha \cdot Tx = T(\alpha \cdot x) \in \mathrm{Im}(T) \qquad \therefore\ \alpha y \in \mathrm{Im}(T)$$

以上より $\mathrm{Im}(T)$ は V の部分空間である事が分かる.

(2) ・ $\mathbb{0} \in U$ に対し $T\mathbb{0} = \mathbb{0}$ より $\mathbb{0} \in \mathrm{Ker}\,T$

・ $x_1, x_2 \in \mathrm{Ker}(T)$, α, β:スカラーに対し

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \cdot Tx_1 + \beta Tx_2 = \alpha \cdot \mathbb{0} + \beta \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0} \qquad \therefore\ \alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathrm{Ker}\,T$$

故に $\mathrm{Ker}(T)$ は U の部分空間である

※ P.64の定理4.1.1.の条件(ii)(iii)は次の条件と同値:

"任意の $u, v \in W$ 及び $c, d \in \mathbb{R}$ に対し $cu + dv \in W$"

(2)の解答は後者の条件で確認したものである.

Date . .

P.91 2

(2) $T(0\cdot x) = T(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $0\cdot T(x) = 0\cdot\begin{bmatrix} x_1+x_2+2 \\ 2x_1+3x_2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

従って $T(0\cdot x) \neq 0\cdot T(x)$ より T は線形写像ではない.

(3) $x = {}^t[x_1, x_2, x_3]$, $y = {}^t[y_1, y_2, y_3] \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$ に対し

$$T(x+y) = \begin{bmatrix} 3(x_1+y_1)-(x_2+y_2)+2(x_3+y_3) \\ (x_1+y_1)+3(x_2+y_2)-(x_3+y_3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3x_1-x_2+2x_3 \\ x_1+3x_2-x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3y_1-y_2+2y_3 \\ y_1+3y_2-y_3 \end{bmatrix} = T(x)+T(y)$$

$$T(c\cdot x) = \begin{bmatrix} 3(cx_1)-(cx_2)+2(cx_3) \\ (cx_1)+3(cx_2)-(cx_3) \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 3x_1-x_2+2x_3 \\ x_1+3x_2-x_3 \end{bmatrix} = c\cdot T(x)$$

より T は線形である. ■

(別解) $x = {}^t[x_1, x_2, x_3]$, $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ と置けば $T(x) = Ax$ と表される. P.87 例1 より T は線形である. ■

(4) $f, g \in \mathbb{R}[x]_3$, $c, d \in \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned} T((cf+dg)(x)) &= 2(cf+dg)'(x) + 3(cf+dg)(x) \\ &= c\cdot 2f'(x)+d\cdot 2g'(x) + c\cdot 3f(x)+d\cdot 3g(x) \\ &= c(2f'(x)+3f(x)) + d(2g'(x)+3g(x)) = cT(f(x))+dT(g(x)). \end{aligned}$$

故に T は線形である. ■

※ T が線形である事と次の条件は同値:

" $u, v \in U$, $c, d \in \mathbb{R}$ に対し $T(c\cdot u+d\cdot v) = c\cdot Tu + d\cdot Tv$ "

(4) の解答は後者の条件を用いた. (1) も同様なので省略.

Date . .

P.91 3

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -5 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ & & O & & \end{bmatrix}$

上の簡約化の結果より

$T(x) = 0 \iff \begin{cases} x_1 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c_1, c_2, c_3は任意定数)

故に $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}_{//}$ が Ker T の基底となり null(T) = $3_{//}$ である. 一方,

$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}_{//}$ は Im T の基底であり, rank(T) = $2_{//}$ である.

(1)(2)も同様. 省略する.

P.91 4 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする $T(e_j) = {}^t[a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}]$ $(\in \mathbb{R}^m, j = 1, \cdots, n)$ とすると

任意の $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ について

$$T(x) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) + \cdots + x_n T(e_n) = (T(e_1), T(e_2), \cdots, T(e_n)) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ここで $A = [T(e_1), \cdots, T(e_n)]$ とすれば $T(x) = Ax$ となる.

Nakabayashi