P. 86 1

(1)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad x \in W \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(C_1, C_2 は任意定数)

これより W の基底として $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ がとれ. したがって $\dim W = 2$ となる.

(2)〜(4) は 同様なので 省略.

(5) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ とする. このとき $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$ より

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$$
$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0.$$

$$\therefore \quad W = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathbb{R}[x]_3 \;\middle|\; \begin{matrix} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$ より

$$f(x) \in W \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = +a_2 + 2a_3 \\ a_1 = -2a_2 - 3a_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ と書ける.

$a_0, \cdots, a_3$ が最右辺のように書けるとき $f(x) \in W$ は

$$f(x) = (c_1+2c_2) + (-2c_1-3c_2)x + c_1x^2 + c_2x^3$$
$$= c_1(1-2x+x^2) + c_2(2-3x+x^3) \qquad (c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

と表されている. これより $\{p_1(x)=1-2x+x^2,\ p_2(x)=2-3x+x^3\}$ が W の基底であり
従って $\dim W = 2$ である.

(6) は (5) と同様なので省略.

P.86 2.

$$(f_1, f_2, f_3) = (1, x, x^2)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = (1, x, x^2)A$$

に於いて変換行列 A が正則ならば $\{f_1, f_2, f_3\}$ は $\mathbb{R}[x]_2$ の基底となる.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

より A は正則. 故に $\{f_1, f_2, f_3\}$ は基底となる.

3. も $(v_1, v_2, v_3) = (u_1, u_2, u_3)A$ とおける 変換行列 A が正則か否かで基底か
どうか判定できる. 2と同様なので省略.

P.86 4.

(2) $f_3 = a + bx + cx^2 + dx^3$, $f_4 = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3$ と置く

$$(f_1, f_2, f_3, f_4) = (1, x, x^2, x^3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & a' \\ 1 & 2 & b & b' \\ 3 & 3 & c & c' \\ 0 & 0 & d & d' \end{bmatrix} = (1, x, x^2, x^3)A$$

P.86 4のつづき

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & a' \\ 0 & 1 & b-a & b'-a' \\ 0 & 0 & c-3a & c'-3a' \\ 0 & 0 & d & d' \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2a-b & 2a'-b' \\ 0 & 1 & b-a & b'-a' \\ 0 & 0 & c-3a & c'-3a' \\ 0 & 0 & d & d' \end{bmatrix}$$

上の変形結果より f_1, f_2 は一次独立である事が分かる。次に $\{f_1, \cdots, f_4\}$ が基底となるような f_3, f_4 を求める。

$\{f_1, \cdots, f_4\}$ は基底 $\Leftrightarrow$ A は正則 $\Leftrightarrow$ Aの行基本変形の結果が正則

である事 及び 一般の正方行列 X に対し X は正則 $\Leftrightarrow$ 行列式 $|X| \neq 0$ より

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2a-b & 2a'-b' \\ 0 & 1 & b-a & b'-a' \\ 0 & 0 & c-3a & c'-3a' \\ 0 & 0 & d & d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c-3a & c'-3a' \\ d & d' \end{vmatrix}$$

より $\{f_1, \cdots, f_4\}$ は基底 $\Leftrightarrow$ $(c-3a) \cdot d' - (c'-3a')d \neq 0$ となる。この条件を満たすものとして 例えば

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad 即ち\ f_3 = 1,\ f_4 = x^3$$

とすれば $\{f_1, \cdots, f_4\}$ は基底となる。

- ポイントは 選んだ組が一次独立である事を示す所。解答では先に基底である為の条件を挙げ、その条件を満たす物を選んだが、選んだ後に一次独立である事を示してもよい。
- P.86 7の結果も参照

Date

P.86 5

$v_1, \cdots, v_r$ が生成する部分空間を V_r とする。これが V と一致するならば、$\{v_1, \cdots, v_r\}$ は V_r、従って V の基底となり、特に $\dim V = r$ となるが、これは $r < \dim V = n$ に矛盾する。故に V_r に含まれないベクトル $v_{r+1} \in V$ が存在する。これを含めた組 $\{v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}\}$ は再び一次独立となる。

(証明) $c_1 v_1 + \cdots + c_r v_r + c_{r+1} v_{r+1} = 0$ だとする。$c_{r+1} \neq 0$ だとすると

$$v_{r+1} = -\frac{c_1}{c_{r+1}} v_1 - \cdots - \frac{c_r}{c_{r+1}} v_r$$

と表わされるが、これは $v_{r+1} \in V_r$ となる事を意味し、そのとり方に矛盾する。従って $c_{r+1} = 0$ であり、このとき $c_1 v_1 + \cdots + c_r v_r = 0$ となり、仮定より $c_1 = \cdots = c_r = 0$ となる。故に $\{v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}\}$ は一次独立となる。 ■

以上より次の事が示された：

$\{v_1, \cdots, v_r\}$ が一次独立 かつ $r < \dim V$

$\Rightarrow$ $\{v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}\}$ が一次独立となる $v_{r+1} \in V$ がとれる。

この操作を $r = n$ となるまで行い、一次独立な組 $\{v_1, \cdots, v_r, \cdots, v_n\}$ が得られる。定理4.4.5より $\{v_1, \cdots, v_r, \cdots, v_n\}$ は基底となる。 ■

P.86 6

(1) W の基底 $\{w_1, \cdots, w_m\}$ をとる。特に一次独立である。定理4.4.4より V 内の一次独立な最大個数は $\dim V$ だから $m \leq \dim V$、即ち $\dim W \leq \dim V$ となる。

(2) W の基底 $\{w_1, \cdots, w_n\}$ をとる。任意の $v \in V$ に対し $c v + c_1 w_1 + \cdots + c_n w_n = 0$ のとき、$c = 0$ だとすると $\{w_1, \cdots, w_n\}$ は一次独立だから $c_1 = \cdots = c_n = 0$ となる。これは $\{v, w_1, \cdots, w_n\}$ が一次独立である事を意味するが、定理4.4.4より V の一次独立な最大個数が $\dim V = \dim W = n$ である事に反する。したがって $c \neq 0$ となり

$$v = -\frac{c_1}{c} w_1 - \frac{c_2}{c} w_2 - \cdots - \frac{c_n}{c} w_n$$

P.86　6のつづき

と表されている，すなわち $a_i \in W$ となる．ゆえに $V \subset W$．したがって $V = W$ となる

P.86　7

定理 4.3.6 より　A：正則 $\Leftrightarrow$ $\{a_1, \cdots, a_n\}$：一次独立．

定理 4.4.5 より　$\{a_1, \cdots, a_n\}$：一次独立 $\Leftrightarrow$ $\{a_1, \cdots, a_n\}$：基底

故に　A：正則 $\Leftrightarrow$ $\{a_1, \cdots, a_n\}$：基底　となる．

・ P.86 4の問題の解答は上の7の結果を使っている．