P.74. 1

∘ m次元列ベクトル $x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{m2} \end{bmatrix}$, $\cdots$, $x_n = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix}$ の場合.

これらを並べて作った $m \times n$ 行列 $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & & x_{mn} \end{bmatrix}$ について

“$x_1, x_2, \dots, x_n$ は 1次独立” $\Leftrightarrow$ “$\mathrm{rank}\, X = n$”

が成立する. 従ってこの場合, 上の行列の階数を調べればよい.

(6).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -8 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

上の変形より ベクトルを並べて作った行列の階数は 4 であり. 故にこのベクトルの系は 1次独立である.

(5)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

上の変形より 3つのベクトルを並べた行列の階数は 2 (<3) だから. このベクトルの系は 1次従属である.

※ ちなみに 上の変形より $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = (-2)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる事が分かる.

(1)~(4) も同様なので省略

No. Date . .

P.74 1. (つづき)

(7) $c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3=0$ $(c_i\in\mathbb{R})$ だとする. xの次数毎にまとめると

$$(c_1+2c_2-c_3)+(c_1-c_2+2c_3)x+(c_1+2c_2+c_3)x^2=0.$$

ここで 例2 (p.68) の結果を用いれば c_1, c_2, c_3 は連立一次方程式

$$\begin{cases} c_1+2c_2-c_3=0 \\ c_1-c_2+2c_3=0 \\ c_1+2c_2+c_3=0 \end{cases}$$

を満たすが, この方程式の係数行列を変形すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

従ってその階数が 3 だから, 方程式は自明解 $c_1=c_2=c_3=0$ しか持たない事が分かる (p.32 定理 2.3.3).

以上より $c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3=0$ ならば $c_1=c_2=c_3=0$, 即ち f_1, f_2, f_3 は1次独立である.

P.74 2.

(2)

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = (2u_1+u_2-u_3-u_4,\ u_1-u_2+2u_3+u_4,\ u_1-u_2+u_3-u_4,\ 2u_1+u_2-2u_3-3u_4)$$

$$= (u_1, u_2, u_3, u_4)\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

書き方の規則に従えば特に難しい所はない。(1)(3)も同様なので省略。

P.74 3

・ $(v_1, \cdots, v_n) = (u_1, \cdots, u_n)P$ に現れる n次正方行列 P を $(u_1, \cdots, u_n)$ から $(v_1, \cdots, v_n)$ への"変換行列"と呼ぶ事にする(この講義だけの名称)。

・ $(u_1, \cdots, u_n)$ が1次独立のとき、次が成立:

"変換行列 P が正則 (= 逆行列を持つ、階数n, …)"
$\Leftrightarrow$ "$(v_1, \cdots, v_n)$ は1次独立"

従って $(v_1, \cdots, v_n)$ が1次独立かどうかは変換行列 P を調べればよい。

(1) 変換行列 P は

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

より階数3であり、従って正則となる。故に (v_1, v_2, v_3) は1次独立。

(2)
$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

No.　　Date　・　・

P.74　3 (つづき)

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より (2) の変換行列の階数は3. 故に正則ではなく, 従って (v_1, v_2, v_3, v_4) は1次従属である.

(3)も同様なので省略.

P.74　4.

(1)　成立しない.

(反例)　$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする. 問1の判定法を使えば u_1, u_2,　u_2, u_3,　u_3, u_1 はそれぞれ1次独立だが

$$[u_1, u_2, u_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

は階数 2 (<3) より u_1, u_2, u_3 は1次従属となる. ▨

(2)　成立する.

(証明)　$c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 = 0$ だとする. 左辺を変形して

$$(c_1 - c_2) u_1 + (c_2 - c_3)(u_1 + u_2) + c_3 (u_1 + u_2 + u_3) = 0$$

仮定より $c_1 - c_2 = c_2 - c_3 = c_3 = 0$ となり, これより $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となる.
従って u_1, u_2, u_3 は1次独立である. ▨

Date . .

P.74 4(つづき)

(3) 成立する.

(証明) 必要ならば添字を変更して $u_1 = 0$ だとする. このとき $1\cdot u_1 + 0\cdot u_2 + \cdots + 0\cdot u_m = 0$ となる事より $u_1, \cdots, u_m$ は一次従属である事が分かる. ▨

P.74 5

$c_1 u_1 + \cdots + c_r u_r = 0$ だとする. このとき $c_1 u_1 + \cdots + c_r u_r + 0\cdot u_{r+1} + \cdots + 0\cdot u_m = 0$ だから仮定より各 u_i の係数は全て 0. 従って $c_1 = \cdots = c_r = 0$ となり, 故に $u_1, \cdots, u_r$ は1次独立である. ▨

P.74 6

$v = c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m = c_1' u_1 + \cdots + c_m' u_m$ と表わされたとする. このとき

$$(c_1 - c_1')u_1 + \cdots + (c_m - c_m')u_m = 0$$

と仮定より $c_1 - c_1' = 0, \cdots, c_m - c_m' = 0$, したがって $c_1 = c_1', \cdots, c_m = c_m'$. 故に v に対する各 u_i の係数 c_i は一意的に定まる. ▨

Nakabayashi