Date . . No.

P.67 1

- 部分空間ならば証明し、そうでなければ反例を与える。

- 部分空間である場合

"$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, $\in W$. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ならば

$$\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \left(= \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{bmatrix} \right) \in W \text{ である"}$$

が成立する事を証明する。

(1) W は部分空間である。

(証明)

$$(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) - (\alpha x_3 + \beta y_3) = \alpha(x_1 + x_2 - x_3) + \beta(y_1 + y_2 - y_3) = 0 + 0 = 0$$

$$3(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) + 2(\alpha x_3 + \beta y_3) = \alpha(3x_1 + x_2 + 2x_3) + \beta(3y_1 + y_2 + 2y_3) = 0$$

より $\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \in W$. 故に W は部分空間である ▨

(3)(5)(6) は部分空間であり、(1) と同様にすれば証明できる (以下省略)

(2) 部分空間ではない。

(反例) $\boldsymbol{x} = {}^t[0, 0, \frac{1}{2}]$ は

$$2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \leq 1, \quad 3 \cdot 0 + 0 + 2 \cdot (\tfrac{1}{2}) = 1 \leq 1$$

より W に属するが、$2\boldsymbol{x} = {}^t[0, 0, 1]$ は $3 \cdot 0 + 0 + 2 \cdot 1 = 2 \neq 1$ より W に属さない。 ▨

No. Date . .

P.67 1 (つづき)

(4) 部分空間ではない.

(反例) $x = {}^t[-1, 0, 1]$ とすると

$$(-1)^2 + 0^2 - 1^2 = 0, \quad (-1) - 0 + 2\cdot 1 = 1$$

より $x \in W$ だが, $-x = {}^t[1, 0, -1]$ は $1 - 0 + 2\cdot(-1) = -1 \neq 1$ より $-x \notin W$ である. ▨

(他の反例) 部分空間は必ず零ベクトル $\mathbf{0}$ を含むが, $0 - 0 + 2\cdot 0 = 0 \neq 1$ より W は $\mathbf{0}$ を含まない. ▨

P.67. 2.

(1)(3)(5)(6) は部分空間である. 他も同様なので (5)(6) のみ証明する.

(5) $f(x), g(x) \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする.

$$(\alpha f + \beta g)'(3) = \alpha f'(3) + \beta g'(3) = \alpha\cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0.$$
$$(\alpha f + \beta g)(1) = \alpha f(1) + \beta g(1) = \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 0 = 0$$

より $\alpha f + \beta g \in W$. したがって W は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間である. ▨

(6) $f(x), g(x) \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする.

$$\begin{aligned}&(\alpha f + \beta g)''(x) - 2x(\alpha f + \beta g)'(x) \\ &= \alpha f''(x) + \beta g''(x) - 2x(\alpha f'(x) + \beta g'(x)) = \alpha(f''(x) - 2xf'(x)) + \beta(g''(x) - 2xg'(x)) \\ &= \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

P.67 2 (つづき)

(6) より $\alpha f + \beta g \in W$，従って W は部分空間である。 ■

(2) 部分空間ではない。

(反例1). $f(x) = -x+1$ とすれば $f(0)=1$, $f(1)=0$ より $f(x) \in W$. f の (-1)倍 $(-f)(x) = x-1$ について $(-f)(0) = -1 \neq 1$ より $-f \notin W$. ■

(4) 部分空間ではない。

(反例) $f(x) = -(x-2)^2$ とすれば $f(1) = -1 \leq 0$, $f(2)=0$ だから $f \in W$.
一方 $(-f)(x) = (x-2)^2$ は $f(1) = 1 \not\leq 0$ だから $-f \notin W$. ■

P.67 3.

W を定理4.1.1. の (ii)(iii) を満たす V の部分集合とする。

1. W が (i) を満たす場合。このとき (i)' が成立する事は明らか。
2. W が (i)' を満たす場合。$w \in W$ をとれば $\mathbb{0} = 0 \cdot w \in W$ となり 従って (i) が成立する。

以上より (ii)(iii) を満たすという状況下で (i) と (i)' は同値である事が確かめられた。 ■

No. Date . .

P.67 4.

(i) $\mathbf{0} \in W_1$. $\mathbf{0} \in W_2$ より $\mathbf{0} \in W_1 \cap W_2$.

(ii) $x, y \in W_1 \cap W_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする. このとき

$x, y \in W_1$ より $\alpha x + \beta y \in W_1$.

$x, y \in W_2$ より $\alpha x + \beta y \in W_2$ $\therefore$ $\alpha x + \beta y \in W_1 \cap W_2$

以上より $W_1 \cap W_2$ が部分空間である事が確められた. ▨

P.67 5

今. $W_1 \not\supset W_2$ だと仮定する. このとき $w_2 \in W_2$ で $w_2 \notin W_1$ となるものが存在する. ここで任意の $w_1 \in W_1$ をとり $w_3 = w_1 + w_2$ と置けば $W_1 \cup W_2$ が部分空間である事から $w_3 \in W_1 \cup W_2$ となるが, 仮りに $w_3 \in W_1$ だとすると $w_2 = w_3 - w_1 \in W_1$ となり w_2 のとり方に反する. 従って $w_3 \in W_2$ となり. 故に $w_1 = w_3 - w_2 \in W_2$ となる.

以上より 任意の $w_1 \in W_1$ が W_2 に属する. 即ち $W_1 \subset W_2$ となる事が分かる. ▨