P.62 1

(4)
$$(与式) = 2^3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4^3 & 4^2 \\ 1 & 2 & 2^3 & 2^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2^3 & 2^2 \end{vmatrix} = -2^3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & (-2)^2 & (-2)^3 \end{vmatrix}$$

$$= -2^3 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 4^2 & 2^2 & 1 & (-2)^2 \\ 4^3 & 2^3 & 1 & (-2)^3 \end{vmatrix}$$

$$= -2^3 \times (2-4)(1-4)(-2-4) \times (1-2)(-2-2) \times (-2-1) = -3456 //$$

他も同様に van der Monde の行列式を用いて計算する. 後は省略.

P.62 2

(1)
$$(与式) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & a-x & a-x & a-x \\ x & y-x & b-x & b-x \\ x & y-x & z-x & c-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & a-x & 0 & 0 \\ x & y-x & b-y & b-y \\ x & y-x & z-y & c-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & a-x & 0 & 0 \\ x & y-x & b-y & 0 \\ x & y-x & z-y & c-z \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)(b-y)(c-z) //$$

(2)
$$(与式) = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ 0 & 0 & a-b & a-b \\ 0 & a-b & 0 & a-b \\ b-a & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & b & b+a \\ 0 & 0 & a-b & a-b \\ 0 & a-b & 0 & a-b \\ b-a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(b-a) \begin{vmatrix} b & b & b+a \\ 0 & a-b & a-b \\ a-b & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$= -(a-b) \begin{vmatrix} b & b & a \\ 0 & a-b & a-b \\ a-b & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(a-b)^3 \begin{vmatrix} b & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-b)^3(b-a)$$
$$= -(a-b)^4 //$$

(3) n に関する帰納法により証明する. $n=1$ のときは自明なので $n>1$ とする. 第n行に関する余因子展開より

$$(左辺) = (-1)^{n+(n-1)} x \underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & 0 \\ x & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & x & 0 \\ & & 1+x^2 & 0 \\ & & x & x \end{vmatrix}}_{n-1次} + (1+x^2) \underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & \\ x & 1+x^2 & & \\ & \ddots & \ddots & x \\ & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{n-1次}$$

No.　　Date　　.　　.

$$= -x^2 \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & \\ x & 1+x^2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ & & x & 1+x^2 \end{vmatrix} + (1+x^2)(1+x^2+\cdots+x^{2n-2})$$

(∵ 第(n-1)列に関する余因子展開，及び帰納法の仮定)

$$= -x^2(1+x^2+\cdots+x^{2n-4}) + 1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2} + x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2}+x^{2n}$$

(∵ 再度帰納法の仮定より)

$$= 1+x^2+\cdots+x^{2n-2}+x^{2n}.$$

▨

(4)　$a=0$ のとき

$$(\text{左辺}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & d & 0 & -f \\ c & e & f & 0 \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & d \\ c & e \end{vmatrix}^2 = (be-dc)^2$$

$f=0$ のときも同様.　$a\cdot f \neq 0$ だとする. このとき

$$(\text{左辺}) = a^2f^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & b' & c' \\ -1 & 0 & d' & e' \\ -b'' & -d'' & 0 & 1 \\ -c'' & -e'' & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$\left(\begin{array}{l} b'=b/a,\ c'=c/a, \cdots \\ b''=b/f,\ d''=d/f, \cdots \end{array}\right.$ とする $\Big)$

$$= a^2f^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & b' & c' \\ -1 & 0 & d' & e' \\ -b'' & 0 & b'd'' & 1+c'd'' \\ -c'' & 0 & -1+b'e'' & c'e'' \end{vmatrix} = a^2f^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & b' & c' \\ -1 & 0 & d' & e' \\ 0 & 0 & b'd''-d'b'' & 1+c'd''-b''e' \\ 0 & 0 & -1+b'e''-c''d' & c'e''-e'c'' \end{vmatrix}$$

$b'd''-b''d' = b/a \cdot d/f - b/f \cdot d/a = 0$.　同様に $c'e''-e'c''=0$ となる.

$$= a^2f^2 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1+c'd''-b''e' \\ -1+b'e''-c''d' & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & af-be+cd \\ -af+be-cd & 0 \end{vmatrix} = (af-be+cd)^2 \,//$$