P53 2.

$1 = \det(E_n) = \det(A^{-1} A) = \det(A^{-1}) \cdot \det(A)$ より $\det(A) \neq 0$, $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

となる. ▨

P53. 3

講義では列に関する性質について説明したが、ここでは行に関する性質を既知として話を進める.

(1)(2)

$\det(a_1, \cdots, \alpha a_i + \beta a_i', \cdots, a_n)$

$$= \det \begin{bmatrix} {}^t a_1 \\ \vdots \\ \alpha\, {}^t a_i + \beta\, {}^t a_i' \\ \vdots \\ {}^t a_n \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} {}^t a_1 \\ \vdots \\ {}^t a_i \\ \vdots \\ {}^t a_n \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} {}^t a_1 \\ \vdots \\ {}^t a_i' \\ \vdots \\ {}^t a_n \end{bmatrix}$$ (∵ 定理3.3.1 及び 3.2.2より)

$= \alpha \cdot \det(a_1, \cdots, a_i \cdots, a_n) + \beta \det(a_1 \cdots, a_i' \cdots, a_n)$ // (∵定理3.3.1より)

(3) $\det(a_1 \cdots, \overset{i\downarrow}{a_j}, \cdots, \overset{j\downarrow}{a_i} \cdots, a_n)$

$$= \det \begin{array}{c} \begin{bmatrix} {}^t a_1 \\ \vdots \\ {}^t a_j \\ \vdots \\ {}^t a_i \\ \vdots \\ {}^t a_n \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ <i \\ \\ <j \\ \\ \\ \end{array} = -\det \begin{bmatrix} {}^t a_1 \\ \vdots \\ {}^t a_i \\ \vdots \\ {}^t a_j \\ \vdots \\ {}^t a_n \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ <i \\ \\ <j \\ \\ \\ \end{array} = -\det(a_1, \cdots, \overset{i\downarrow}{a_i} \cdots \overset{j\downarrow}{a_j} \cdots a_n)$$ // (∵ 定理3.3.1 及び 3.2.3 より)

(4) (3)より

$\det(a_1 \cdots \overset{i\downarrow}{a} \cdots \overset{j\downarrow}{a} \cdots a_n) = -\det(a_1, \cdots, \overset{j\downarrow}{a} \cdots \overset{i\downarrow}{a} \cdots a_n)$ $\therefore \det(a_1 \cdots a \cdots a \cdots a_n) = 0$ //

(5) (1)(2)(4)より

$\det(a_1 \cdots, \overset{i\downarrow}{a_i}, \cdots, \overset{j\downarrow}{a_j + c a_i}, \cdots a_n)$

$= \det(a_1, \cdots, \overset{i\downarrow}{a_i}, \cdots, \overset{j\downarrow}{a_j}, \cdots, a_n) + c \det(a_1, \cdots, \overset{i\downarrow}{a_i}, \cdots, \overset{j\downarrow}{a_i}, \cdots, a_n)$

$= \det(a_1, \cdots, \overset{i\downarrow}{a_i}, \cdots, \overset{j\downarrow}{a_j}, \cdots, a_n)$ ▨

No. Date . .

P.53 4. 定理 3.3.5 より

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & d \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{vmatrix} = (ac+bd)^2-(ad+bc)^2$$

$$= (a^2-b^2)(c^2-d^2) \qquad \therefore\ (a^2-b^2)(c^2-d^2) = (ac+bd)^2-(ad+bc)^2 \quad \blacksquare$$

P.53 5

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & O \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} B & A \\ O & C \end{vmatrix} = (-1)^n |B||C| \,/\!/$$

($\because$ $1\leq k\leq n$ に対し k 行列と $n+k$ 行列を入れ換える。
$\because$ 定理 3.3.4 より)

P.53 6.

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ B+A & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ O & A-B \end{vmatrix} = |A+B||A-B| \,/\!/$$

($1\leq k\leq n$ に対し k 行列に $n+k$ 行列を加える。) ($1\leq k\leq n$ に対し $n+k$ 行列より k 行を引く。) (定理 3.3.4)

P.53 7 定理 3.3.5 より $|A|^m=1$ 一般に方程式 $z^m=1$ の解は $z=\exp(\frac{2\pi k}{m}i)$ $(k=0,1,\cdots,m-1)$ により与えられる事より $|A|=\exp(\frac{2\pi k}{m}i)$ という形になる。Euler の公式より

$$\exp\left(\frac{2\pi k}{m}i\right) = \cos\left(\frac{2\pi k}{m}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \in \mathbb{R} \iff \frac{2\pi k}{m} \in \pi\mathbb{Z}$$

従って $2k=ml$ $(l\in\mathbb{Z})$ という形で表わされる。 $0\leq k<m$ より $0\leq 2k<2m$, $0\leq ml<2m$.
故に $l=0,1$ であるが、$l=1$ だとすると $m=2k$ となるが、m が奇数である事に反する。故に $l=0$.
$k=0$, $|A|=\exp(0)=1$ となる。 $\blacksquare$

※ 問題文に A は実行列 (=実数を成分とする行列) であるという仮定が無いので、本当は $|A|$ が実数かどうかは不明だが、A が実行列であるという仮定の下で考える。

P.53.1 は ただの計算なので省略する。