Date　.　.　No.

P.42　1.

(1) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1,2,3)$ //

後者下段に合わせて変更　　　結果が互換になる

(2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3&2&1\\1&2&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}=(3\,4)$ //

上段の変更に連動させて変更.　　　前者下段，後者上段を合わせる

(3) $(1\,3)(2\,3)(2\,4)=\begin{pmatrix}1&4&2&3\\3&4&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&3&2\\1&4&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$ //

(4) $(1\,4)(3\,2)(1\,2\,4\,3)(2\,3)$

$=\begin{pmatrix}3&1&4&2\\3&4&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&4&3\\3&1&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&2&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$ //

P.42　2

(2) $1\to3\to5\to2\to1$
$4\to8\to7\to6\to4$　　$\therefore\ \sigma=(1\,3\,5\,2)\cdot(4\,8\,7\,6)$ //

(1)は同様のやり方なので省略.

P.42　3

(1) $(1,3,6,4)=(1,4)(1,6)(1,3)=(1,3)\cdot(3,6)\cdot(6,4)$　　$\therefore\ \mathrm{sgn}=-1.$

(2) $(1,2,5,3,4)=(1,4)(1,3)(1,5)(1,2)=(1,2)(2,5)(5,3)(3,4)$　　$\therefore\ \mathrm{sgn}=+1$

(3) $(2,4,6)=(2,6)(2,4)=(2,4)(4,6)$　　$\therefore\ \mathrm{sgn}=+1$

(4) (与式) $=(1,3,4)\cdot(2,7,6,5)$

$=(1,4)(1,3)\cdot(2,5)\cdot(2,6)\cdot(2,7)$　　$\therefore\ \mathrm{sgn}=-1.$

(5) (与式) $=(1,3)(2,4,9)\cdot(5,8,7)=(1,3)(2,9)\cdot(2,4)\cdot(5,7)\cdot(5,8)$　　$\therefore\ \mathrm{sgn}=-1.$

巡回置換を互換の積に直すやり方は P.40の中段参照. 又, 符号については「置換の符号」参照.

No. Date . .

P.42. 4.

1の行き先に応じて4通りに分ける。その後各置換を巡回置換の積に分解する:

$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$:恒等置換, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$
$=(4.3)$ $=(2.3)$ $=(2.3.4)$

$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$
$=(2.4.3)$ $=(2.4)$

$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$
$=(2.1)$ $=(1.2)\cdot(3.4)$ $=(1.2.3)$ $=(1.2.3.4)$ $=(1.2.4.3)$ $=(1.2.4)$

$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$
$=(1.3.2)$ $=(1.3.4.2)$ $=(1.3)$ $=(1.3.4)$ $=(1.3)(2.4)$ $=(1.3.2.4)$

$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$
$=(1.4.3.2)$ $=(1.4.2)$ $=(1.4.3)$ $=(1.4)$ $=(1.4.2.3)$ $=(1.4)(2.3)$

上の計算より

$\mathfrak{S}_4$の偶置換: ε_4(恒等置換), $(2.3.4)$, $(2.4.3)$, $(1.2)\cdot(3.4)$, $(1.2.3)$, $(1.2.4)$
$(1.3.2)$ $(1.3.4)$, $(1.3)(2.4)$, $(1.4.2)$, $(1.4.3)$, $(1.4)(2.3)$

$\mathfrak{S}_4$の奇置換: (4.3), (2.3), (2.4), (1.2), $(1.2.3.4)$, $(1.2.4.3)$, $(1.3.4.2)$
$(1.3.2.4)$, $(1.4.3.2)$, (1.4), $(1.4.2.3)$, (1.3)

(長さ m の巡回置換は $m-1$ 個の互換の積で表わされる事に注意)

P.42 5

(3) $\sigma f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_3, x_2) = (x_1-x_3)(x_1-x_2)(x_3-x_2)$

$= -(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3) = -f(x_1, x_2, x_3)$ //

(4) $\sigma f(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, x_3, x_1) = (x_2-x_3)(x_2-x_1)(x_3-x_1)$

$= (-1)^2 (x_2-x_3)(x_1-x_2)(x_1-x_3) = f(x_1, x_2, x_3)$ //

(1)(2)は同様なので省略.

P.42. 6

$\sigma = (k, l)$ $(1 \le k < l \le n)$ とする.

$$\sigma\Delta(x_1, \cdots, \overset{k}{x_k}, \cdots, \overset{l}{x_l}, \cdots, x_n) = \Delta(x_1, \cdots, \overset{k}{x_l}, \cdots, \overset{l}{x_k}, \cdots, x_n)$$

①　　　　　　　　　①'

$= (x_1-x_2) \times \cdots \times \boxed{(x_1-x_l)}(x_1-x_{k+1})(x_1-x_{k+2}) \times \cdots \times \boxed{(x_1-x_k)}(x_1-x_{l+1}) \times \cdots \times (x_1-x_n)$

$\times (x_{k-1}-x_l)(x_{k-1}-x_{k+1})(x_{k-1}-x_{k+2}) \times \cdots \times (x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{l+1}) \times \cdots \times (x_{k-1}-x_n)$

$\times (x_l-x_{k+1})(x_l-x_{k+2}) \times \cdots \times (x_l-x_k)(x_l-x_{l+1}) \times \cdots \times (x_l-x_n)$ ②

③

$\times (x_{k+1}-x_{k+2}) \times \cdots \times (x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_{l+1}) \times \cdots \times (x_{k+1}-x_n)$

④

$\times (x_{l-1}-x_k)(x_{l-1}-x_{l+1}) \times \cdots \times (x_{l-1}-x_n)$

③'　$\times (x_k-x_{l+1}) \times \cdots \times (x_k-x_n)$ ②'

$\vdots$

$\times (x_{n-1}-x_n)$

①,①' 及び ②②' 同志を入れ換える. ③,③' の部分にある項は「$x_i - x_j$ $(i>j)$」という形なので −1 を操り出し. ③,③' を入れ換える. 特に ③,③' はそれぞれ $l-k-1$ 個の項ずつあるので. 操り出した −1 は相殺する. 最後に ④より −1 を 1回操り出せば $\sigma\Delta(x_1, \cdots, x_n) = -\Delta(x_1, \cdots, x_n)$ である事が分かる. ∎

P.42 7

$$((\sigma\tau)f)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_{\sigma\tau(1)}, x_{\sigma\tau(2)}, \cdots, x_{\sigma\tau(n)})$$
$$= f(x_{\sigma(\tau(1))}, x_{\sigma(\tau(2))}, \cdots, x_{\sigma(\tau(n))})$$
$$= (\tau f)(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$$
$$= (\sigma(\tau f))(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$(\sigma\tau)f = \sigma(\tau f)$. ■

P.42.8

σ は互換 $\sigma_i = (k_i\ l_i)$ の積で表わされる： $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m$ このとき 問6.7より

$$\sigma\Delta = \sigma_1(\sigma_2(\cdots(\sigma_m\Delta)\cdots)) \quad \text{(問7より)}$$
$$= \sigma_1(\sigma_2(\cdots(\sigma_{m-1}(-\Delta))\cdots)) \quad \text{(問6より)}$$
$$= (-1)\,\sigma_1(\sigma_2(\cdots(\sigma_{m-1}\Delta)\cdots))$$
$$= \cdots = (-1)(-1)^{m-1}\Delta = (-1)^m\Delta$$

また σ が別の互換の積 $\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_l$ で表わされるとする. このとき $\sigma\Delta = (-1)^l\Delta$ となるが、 $(-1)^m\Delta = (-1)^l\Delta$, $(-1)^m = (-1)^l$ が成立. これより σ がどのような互換の積に表わされても、符号 $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^m$ （積に使う互換の個数の偶奇性）は変わらない. ■