P.37 1

(1)
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{②}-2\times\text{③}]{\text{①}-2\times\text{③}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{①}-\text{②}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{③}+\text{①}]{\text{②}-\text{①}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{②}\times(-1)]{\text{①}\Leftrightarrow\text{③}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

上の計算の結果より逆行列は $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ //

(2)
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{②}-3\times\text{③}]{\text{①}+3\times\text{③}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{③}-\text{①}]{\text{②}+\text{①}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{①}+3\times\text{②}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{②}\times(-1)]{\text{①}\times(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{①}\Leftrightarrow\text{③}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & -3 \end{array}\right]$$

よって逆行列は $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & -3 \end{bmatrix}$,

(3)
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{③}+\text{②}]{\text{①}-\text{②}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{②}\times 2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{③}+\text{①}]{\text{②}+\text{①}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{②}+2\times\text{③}]{\text{①}+\text{③}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{①}\times(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{①}\Leftrightarrow\text{②}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

全行に $\frac{1}{2}$ を掛ければ、逆行列は $\begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ となる事が分かる。//

Date . .

P37 1.

(4)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1& \\ 0&1&1&1& \\ 0&0&1&1& E_4 \\ 0&0&0&1& \end{array}\right] \xrightarrow[\text{③}-\text{④}]{\text{①}-\text{④},\ \text{②}-\text{④}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&0&1&0&0&-1 \\ 0&1&1&0&0&1&0&-1 \\ 0&0&1&0&0&0&1&-1 \\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{②}-\text{③}]{\text{①}-\text{③}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&0&0&1&0&-1&0 \\ 0&1&0&0&0&1&-1&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&-1 \\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{①}-\text{②}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&-1&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&-1&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&-1 \\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right] \qquad \therefore\ (\text{逆行列}) = \begin{bmatrix} 1&-1&0&0 \\ 0&1&-1&0 \\ 0&0&1&-1 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} //$$

(5)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2&0&1&0& \\ 0&-1&1&-2& \\ 1&0&1&0& E_4 \\ 0&1&-1&3& \end{array}\right] \xrightarrow{\text{①}-2\times\text{③}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0&0&-1&0&1&0&-2&0 \\ 0&-1&1&-2&0&1&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&1&0 \\ 0&1&-1&3&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{④}+\text{②}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0&0&-1&0&1&0&-2&0 \\ 0&-1&1&-2&0&1&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&1&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{③}+\text{①}]{\text{②}+\text{①}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0&0&-1&0&1&0&-2&0 \\ 0&-1&0&-2&1&1&-2&0 \\ 1&0&0&0&1&0&-1&0 \\ 0&0&0&1&0&1&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{②}+2\times\text{④}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0&0&-1&0&1&0&-2&0 \\ 0&-1&0&0&1&3&-2&2 \\ 1&0&0&0&1&0&-1&0 \\ 0&0&0&1&0&1&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{②}\times(-1)]{\text{①}\times(-1)} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0&0&1&0&-1&0&2&0 \\ 0&1&0&0&-1&-3&2&-2 \\ 1&0&0&0&1&0&-1&0 \\ 0&0&0&1&0&1&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{①}\leftrightarrow\text{③}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&-1&0 \\ 0&1&0&0&-1&-3&2&-2 \\ 0&0&1&0&-1&0&2&0 \\ 0&0&0&1&0&1&0&1 \end{array}\right]$$

$$\therefore\ (\text{逆行列}) = \begin{bmatrix} 1&0&-1&0 \\ -1&-3&2&-2 \\ -1&0&2&0 \\ 0&1&0&1 \end{bmatrix} //$$

Date

P.37 2　$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ という形になっているとする.

(1)

$$[A|E_3] = \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 2 & \\ 3 & -1 & 2 & E_3 \\ -2 & 1 & -1 & \end{array}\right] \xrightarrow[\text{②}+\text{③}]{\text{①}+2\times\text{③}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{③}+2\times\text{①}]{\text{②}-\text{①}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{③}+\text{②}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{②}\leftrightarrow\text{③}} \left[\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & 2 \\ E_2 & 1 & 1 & 4 \\ & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

故に $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$　$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix}$ //

(2)

$$[A|E_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{②}-5\times\text{③}]{\text{①}-4\times\text{③}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{①}-\text{②}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{③}+\text{①}]{\text{②}-2\times\text{①}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{①},\text{②}\times(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{①}\to\text{②}\to\text{③}\to\text{①}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & +7 \end{array}\right]$$

$\therefore\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a-b+2c \\ -a+b-c \\ 2a-3b+7c \end{bmatrix}$ //

P.37 3

(1)

$$[A|E_3] \xrightarrow{\text{①},\text{②},\text{③}\div a} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/a & 1/a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a \end{array}\right] \xrightarrow[\text{②}-1/a\times\text{③}]{\text{①}-1/a\times\text{③}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/a & 0 & 1/a & 0 & -1/a^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a & -1/a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{①}-1/a\times\text{②}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/a & -1/a^2 & -1/a^2+1/a^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a & -1/a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a \end{array}\right]$$

$$\therefore\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & -1/a^2 & -1/a^2+1/a^3 \\ 0 & 1/a & -1/a^2 \\ 0 & 0 & 1/a \end{bmatrix} //$$

Date . .

P.37 3

(2)

$$[A \mid E_3] \xrightarrow[\text{②}-2\times\text{③}]{\text{①}-\text{③}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -a & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2a-2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{③}-\text{②}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -a & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2a-2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3-2a & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{③}-2\times\text{①}]{\text{②}+2\times\text{①}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -a & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & -2 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{①}\times(-1/a)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1/a & 0 & 1/a \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & -2 & -1 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{③}-3\times\text{①}]{\text{②}+2\times\text{①}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1/a & 0 & 1/a \\ 0 & 1 & 0 & 2-2/a & 1 & -4+2/a \\ 1 & 0 & 0 & -2+3/a & -1 & 5-3/a \end{array}\right] \xrightarrow{\text{①}\leftrightarrow\text{③}} \cdots$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -2+3/a & -1 & 5-3/a \\ 2-2/a & 1 & -4+2/a \\ -1/a & 0 & 1/a \end{bmatrix} \,_{//}$$

Date

P.37 4.

(1) A^{-1} に対し $A\cdot A^{-1}=A^{-1}A=E$ より A^{-1} は正則であり. 逆行列の一意性より $(A^{-1})^{-1}=A$ となる.

(2) 仮定より $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$. 両辺の転置をとると ${}^t(A^{-1})\cdot{}^tA={}^tA\cdot{}^t(A^{-1})=E$ だから. ${}^tA$ は正則であり. 逆行列の一意性より $({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$ となる.

(3) $B^{-1}A^{-1}(AB)=B^{-1}EB=E$. $(AB)\cdot B^{-1}A^{-1}=AEA^{-1}=E$

より $B^{-1}A^{-1}$ が AB の逆行列である事が分かる. 従って AB は正則であり 逆行列の一意性より $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ となる.

P.37 5.

(1) $AB=BA$ の両辺に A^{-1} を左右より1回ずつ掛けると

$$A^{-1}ABA^{-1}=A^{-1}BA\cdot A^{-1}, \quad EBA^{-1}=A^{-1}BE. \quad \therefore BA^{-1}=A^{-1}B.$$

(2) (1)の結果の両辺に B^{-1} を1回ずつ掛けると

$$B^{-1}BA^{-1}\cdot B^{-1}=B^{-1}A^{-1}B\cdot B^{-1}. \quad EA^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}E \quad \therefore A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

(3) $AB=BA$ の両辺の転置をとると ${}^t(AB)={}^t(BA)$, ${}^tB{}^tA={}^tA\cdot{}^tB$.

P.37 6.

A が正則ならば A^{-1} が存在するから. $AB=O$ の左より A^{-1} を掛けると

$$A^{-1}A\cdot B=A^{-1}\cdot O=O. \quad EB=O. \quad \therefore B=O$$

これは $B\neq O$ という仮定に反する 従って A は正則ではない

Date . .

P.37 7

一般のn次正方行列A、及び自然数nに対し

$$(E-A)(E+A+\cdots+A^n) = \begin{aligned}&E+A+\cdots+A^n \\ &-A-\cdots-A^n-A^{n+1}\end{aligned} = E-A^{n+1}$$

が成立。又 A を $-A$ に置き換えれば

$$(E+A)(E-A+A^2+\cdots+(-1)^nA^n) = E-(-1)^{n+1}A^{n+1}$$

が成立。今、Aがべき零、即ち $A^n \neq O$、$A^{n+1}=O$ となる n が存在したとすると、上の式より

$$(E-A)(E+A+\cdots+A^n) = E, \quad (E+A)(E-A+A^2+\cdots+(-1)^nA^n) = E$$

となる。従って A がべき零ならば $E\pm A$ は正則であり、それぞれの逆行列は

$$(E-A)^{-1} = E+A+\cdots+A^n, \quad (E+A)^{-1} = E-A+A^2+\cdots+(-1)^nA^n$$

により与えられる。

Nakabayashi

Date . . No.

P.37 8

X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1} を具体的に与える事により X, Y, Z の正則性を示す

仮りに X が正則だとし、更に X の分割に応じて $X^{-1} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$ (A': m次正方、

D': n次正方, …) と分割されているとする。このとき

$$\begin{bmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{bmatrix} = X \cdot X^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ DC' & DD' \end{bmatrix}$$

より $AA'+BC'=E_m$、$AB'+BD'=O$、$DC'=O$、$DD'=E_n$ が成立する。

$DD'=E_n$ より $D'=D^{-1}$ となる。
$DC'=O$ 及び D が正則である事より $C'=O$
$AA'+BC'=E_m$ と $C'=O$ より $AA'=E_m$ 従って $A'=A^{-1}$ となる
$AB'+BD'=O$ と A が正則である事より $B'=-A^{-1}BD'=-A^{-1}BD^{-1}$

従って $\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}$ // が X の逆行列となり、故に X は正則である

上記と同様の議論により Y, Z が正則な事、及び

$$Y^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix} //, \quad Z^{-1} = \begin{bmatrix} O & D^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix} //$$

となる事が分かる。