P.33 1

(1)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[②\times(1/2)]{①-2\times③} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{①+②} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{①\leftrightarrow③} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \quad +3x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_3 + 1 \\ x_2 = -x_3 + 3 \end{cases} \quad \therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} //$$

(cは任意定数)

(2)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{①+3\times③} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{①\times(1/7)} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1/7 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{②-2\times①} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1/7 \\ 1 & -1 & 0 & -2/7 \end{array}\right] \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 \end{array}\right]$$

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = -2/7 \\ x_3 = 1/7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - 2/7 \\ x_3 = 1/7 \end{cases} \quad \therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2/7 \\ 0 \\ 1/7 \end{bmatrix} //$$

(c は任意定数)

(3)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 7 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[③-①]{②+①} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[①-②]{③+3\times②} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(係数行列の階数) < (拡大係数行列の階数) となり、これより この方程式 は 解を持たない事が分かる。

P.33 1

(4)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}+\text{②}]{\text{①}+2\times\text{②}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{②}-\text{①}]{\text{③}+2\times\text{①}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{②}\leftrightarrow\text{①}]{\text{②}\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(与式) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -6x_3 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases}$ $\quad\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (Cは任意定数)

(5)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{③}+\text{①}]{\text{②}-2\times\text{①}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{③}-3\times\text{②}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 18 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{③}\times(1/18)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{①}-2\times\text{③}]{\text{②}+5\times\text{③}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

(与式) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + x_4 + 1 \\ x_2 = x_3 - x_4 - 2 \\ x_5 = 1 \end{cases}$ $\quad\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ //

(C_1, C_2は任意定数)

P.33 1

(6)
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & 7 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[③-3\times①]{②+①} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -8 & -8 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[③\times(-1/8)]{②\times(1/3)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1/4 \end{array}\right] \xrightarrow{③-②} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/12 \end{array}\right]$$

(係数行列の階数) < (拡大係数行列の階数) となり、これより方程式は解を持たない。

(7)
$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+②]{①-②} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[③\times(1/2)]{②-①} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[②+3\times③]{①-3\times③} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\times(-1/2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\Leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (与式) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 - 2x_5 \\ x_2 = -2x_5 \\ x_3 = -x_4 - x_5 \end{cases} \qquad \therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(C_1, C_2は任意定数)

P.33 2

(1)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right] \xrightarrow{①-2\times③} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1-2b \\ 0 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right] \xrightarrow[③+②]{①-②} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1-a-2b \\ 0 & -1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 & a+b \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[②\times(-1)]{①\Leftrightarrow③} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a+b \\ 0 & 1 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1-a-2b \end{array}\right]$$

係数行列の階数が2なので、解を持つ為には拡大係数行列 階数 2でなければいけない。これより解を持つ為には $1-a-2b=0$、すなわち $a+2b=1$ でなければいけない。

No. Date . .

P.33 2

(2)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & a & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{③}-2\times\text{①}]{\text{②}-\text{①}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-2 & 1 \end{array}\right]$$

拡大係数行列の階数は3なので. 解を持つ為には係数行列の階数が3にならなければいけない. 即ち $a \neq 2$ でなければいけない.

P.33. 3. $A\mathbb{x}_1 = \mathbb{0}$ となる $\mathbb{x}_1$ がとれたとする. これを用いて $\mathbb{x} = \mathbb{x}_0 + \mathbb{x}_1$ と置けば

$$A\mathbb{x} = A\mathbb{x}_0 + A\mathbb{x}_1 = \mathbb{b} + \mathbb{0} = \mathbb{b}$$

となり. 従って $\mathbb{x}$ は方程式 (*) の解となる.

一方. $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ となる $\mathbb{x}$ がとれたとする. これを用いて $\mathbb{x}_1 = \mathbb{x} - \mathbb{x}_0$ と置けば

$$A\mathbb{x}_1 = A\mathbb{x} - A\mathbb{x}_0 = \mathbb{b} - \mathbb{b} = \mathbb{0}$$

となり. 従って $\mathbb{x}_1$ は方程式 (**) の解となる. 従って方程式 (*) の解 $\mathbb{x}$ は $\mathbb{x} = \mathbb{x}_0 + \mathbb{x}_1$ $(A\mathbb{x}_1 = \mathbb{0})$ という形で表わされる事になる. ▨