No.

DATE

P.14 1

$$\left[\begin{array}{cc:cc}2&1&1&0\\4&3&0&1\\ \hdashline 0&0&1&2\\0&0&0&1\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc:cc}1&1&1&0\\3&2&0&1\\ \hdashline 0&0&2&1\\0&0&1&0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A_{11}&E_2\\O&A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11}&E_2\\O&B_{22}\end{bmatrix}$$

$\left(A_{11}=\begin{bmatrix}2&1\\4&3\end{bmatrix},\ A_{22}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\right.$

$B_{11}=\begin{bmatrix}1&1\\3&2\end{bmatrix},\ B_{22}=\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}$

と置く.

$$=\begin{bmatrix}A_{11}B_{11}&A_{11}+B_{22}\\O&A_{22}B_{22}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:cc}5&4&4&2\\13&10&5&3\\ \hdashline 0&0&4&1\\0&0&1&0\end{array}\right]_{//}$$

P.14 2

$$[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3]\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\\vdots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&a_{m3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a_{11}+a_{12}+3a_{13}\\2a_{21}+a_{22}+3a_{23}\\\vdots\\2a_{m1}+a_{m2}+3a_{m3}\end{bmatrix}$$

$$=2\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}a_{13}\\a_{23}\\\vdots\\a_{m3}\end{bmatrix}=2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_3{}_{//}$$

※ 計算結果をみれば、ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ を数の場合と同様に扱ってよい事が分かる.

P.14 3.

$$AB=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\4&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a_{11}+4a_{12}&a_{11}+7a_{12}\\2a_{21}+4a_{22}&a_{21}+7a_{22}\\\vdots&\vdots\\2a_{m1}+4a_{m2}&a_{m1}+7a_{m2}\end{bmatrix}$$

$$=\left[2\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}+7\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix}\right]=[2\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_1+7\boldsymbol{a}_2]_{//}$$

※ これもベクトルを数と同様に扱ってもよい事を裏付ける結果である.

No.

DATE

P.14 4

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 & O \\ O & A_2B_2 \end{bmatrix}$$

$\left(\begin{matrix} A_1B_1 = B_1A_1 \\ A_2B_2 = B_2A_2 \end{matrix}\ \text{より}\right)$

$$= \begin{bmatrix} B_1A_1 & O \\ O & B_2A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix} = BA$$

従って A,B は可換である.

P.14 5

$$\begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m^2 & E_mA + AE_n \\ O & E_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m & 2A \\ O & E_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m & 2A \\ O & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E_m^2 & E_mA + 2AE_n \\ O & E_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m & 3A \\ O & E_n \end{bmatrix}$$

より任意の自然数 k に対し

$$\begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} E_m & kA \\ O & E_n \end{bmatrix} \cdots (*)$$

であると予想される. これを k に関する帰納法により証明する. $k=0,1$ のときは自明.
$k>1$ とし, $0 \leq l < k$ となる任意の自然数 l に対し $(*)$ が成立すると仮定する. このとき

$$\begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix}^{k-1} \cdot \begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m & (k-1)A \\ O & E_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E_m^2 & E_mA + (k-1)AE_n \\ O & E_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m & kA \\ O & E_n \end{bmatrix}$$

より k についても $(*)$ が成立. 従って任意の自然数 k について $(*)$ が成立する.

$$\therefore \begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} E_m & kA \\ O & E_n \end{bmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots) \quad //$$