1.2.(4) $\sigma=(4,2,7,3,1,6,5)$ について

1の左にある	1より大きい数		4,2,7,3	4個
2 〃	2 〃		4	1個
3 〃	3 〃		4,7	2個
4 〃	4 〃			0個
5 〃	5 〃		7,6	2個
6 〃	6 〃		7	1個
7 〃	7 〃			0個

転倒数は
$4+1+2+0+2+1+0=10$〃
符号は $\mathrm{sgn}\,\sigma=(-1)^{10}=+1$〃

(1)(2)(3)も同様なので省略.

3.(1) (1,2,3) (1,3,2) (2,1,3). (2,3,1). (3,1,2) (3,2,1)
(2) (1)の各順列に対する転倒数は 0,1,1,2,2,3. 転倒数の偶奇により

偶置換 (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2),〃
奇置換 (1,3,2),(2,1,3),(3,2,1)〃 となる.

※ 符号が+1(−1)(すなわち転倒数が偶数(奇数))になる順列を"偶置換"("奇置換")と呼ぶ.

1. (1) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 3-(-2)\cdot 8 = 31$ //

公式(14.2)を利用. (2)(3)は同様なので省略.

(5)
$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & 1 & 3 & 7 \end{array}$$
$$\begin{array}{cccccc} - & - & - & + & + & + \\ -30 & 0 & -1 & 10 & 0 & 14 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 10+0+14-(-30)-0-(-1) = 55 \,/\!/$$

公式(14.5)を利用. (4)(6)(7)(8)は同様なので省略.

(9) 第1～3行で 0以外の数の選び方は a(第4列), b(第3列), c(第2列)であり
これ以外を選んだ場合, その積は 0 となる. 更に a, b, c と選んだ場合, 第4行は
d(第1列)を選ばなければいけない. この事より

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & e & f & g \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(4,3,2,1)\,abcd = (-1)^{3+2+1}abcd = abcd \,/\!/$$

(10)は(9)と同様に考える. 省略.

(11) 第1行で 1(第1列)を選んだ場合, 第2,3,4行での 0以外の選び方は 3(第2列),
4(第3列), 7(第4列) の1通り.
第1行で 2(第3列)を選んだ場合, 第2,3,4行での 0以外の選び方は 3(第2列),
5(第4列), 6(第1列) の1通り.

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(1,2,3,4)\ 1\times 3\times 4\times 7 + \mathrm{sgn}(3,2,4,1)\ 2\times 3\times 5\times 6$$

$$= (+1)\times 84 + (+1)\times 180 = 264 \,/\!/$$

2. $|A|$ の定義に現れる項は $\mathrm{sgn}(p_1, \cdots, p_n)\, a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ という形であるが、仮定より $a_{1p_1} = 0$ であるから、全ての項は 0，従って $|A| = 0$ となる。 ▨

3.4.

$$|A| = \sum_{(p_1 \cdots p_n)\text{は偶置換}} \mathrm{sgn}(p_1 \cdots p_n)\, a_{1p_1} \cdots a_{np_n} + \sum_{(p_1 \cdots p_n)\text{は奇置換}} \mathrm{sgn}(p_1 \cdots p_n)\, a_{1p_1} \cdots a_{np_n}$$

$$= \sum_{(p_1 \cdots p_n)\text{は偶置換}} (+1)\, a_{1p_1} \cdots a_{np_n} + \sum_{(p_1 \cdots p_n)\text{は奇置換}} (-1)\, a_{1p_1} \cdots a_{np_n}$$

と表す事ができる。このとき定理13.2より偶置換，奇置換の個数はそれぞれ $\frac{n!}{2}$ 個だから正，負の符号がついた項はそれぞれ $\frac{n!}{2}$ 個，である。

特に $n = 4$ のときは 12個，$n = 5$ のときは 60個，となる。

P.67, 68

No. 1 Date . .

1. (1) $(\text{左辺}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5+1\times5 & 6+0\times5 & 7+0\times5 \\ 3+1\times(-3) & -1+0\times(-3) & 4+0\times(-3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (\text{右辺})$ //

(2) $(\text{左辺}) = (-8)\begin{vmatrix} 3 & a & b \\ 1 & 0 & 0 \\ 9 & c & d \end{vmatrix} = (-8)\cdot(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & a & b \\ 9 & c & d \end{vmatrix} \underset{((1)\text{と同様})}{=} 8\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = (\text{右辺})$ //

(3) $(\text{左辺}) = \begin{vmatrix} x+1+1 & 1+x+1 & 1+1+x \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & x+2 & x+2 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (\text{右辺})$ //

(4) $(\text{左辺}) = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1-1 & b-a & ca-bc \\ 1-1 & c-a & ab-bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & -(a-b) & c(a-b) \\ 0 & c-a & -b(c-a) \end{vmatrix} = (\text{右辺})$ //

2. 一般に次の事が分かる:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(証明) P.58 (14.5) より 上の最左辺について

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}\cdot0 + a_{13}0a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}0a_{33} - a_{13}a_{22}0 \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

他も同様.

(1) $(\text{与式}) = 1\cdot\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 24-(-7) = 31$ //

(2) $(\text{与式}) = 8\times1\times\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 8(ad-bc)$ //

(3) $(\text{与式}) = \begin{vmatrix} x+2 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+2)\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+2)(x-1)^2$ //

(4) $(\text{与式}) = \begin{vmatrix} -(a-b) & c(a-b) \\ c-a & -b(c-a) \end{vmatrix} = (a-b)(c-a)\begin{vmatrix} -1 & c \\ 1 & -b \end{vmatrix} = (a-b)(c-a)(b-c)$

$= (a-b)(b-c)(c-a)$ //

3. $A=[a_1,\cdots,a_n]$ とする. このとき $kA=[ka_1,\cdots,ka_n]$ となる. ここで (15.3) より

$$|kA| = |ka_1,\cdots,ka_n| = k|a_1,ka_2,\cdots,ka_n|$$
$$= k^2|a_1,a_2,ka_3,\cdots,ka_n| = \cdots = k^n|a_1,\cdots,a_n| = k^n|A|.$$ ▨

4.(1) 問題3 より $|-A|=(-1)^n|A|$. nが奇数なので $(-1)^n=-1$. 故に $|-A|=-|A|$. ▨

(2) Aが交代行列である事より ${}^tA=-A$. これと (15.1) 及び (1) より $|-A|=|{}^tA|=|A|$, 及び $|-A|=-|A|$. 従って $|A|=-|A|$. 故に $|A|=0$ となる. ▨

5.(1) $$(与式) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 /\!/$$

(2) $$(与式) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ b+c & a-b & a-c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ b+c & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 /\!/$$ ($\because$ 系15.5より)

1. (4) $(与式) = (-1)^2 \begin{vmatrix} e & f & g \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = e \times \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = e(ad-bc)$ //

(5) $(与式) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = (10-1)\cdot(-15+12) = -27$ //

(6) $(与式) = a \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 \\ 2 & 1 & d \end{vmatrix} = a\cdot b\cdot \begin{vmatrix} c & 0 \\ 1 & d \end{vmatrix} = abcd$ //

他も同様なので省略.

2. (2) $(与式) \overset{②+x①}{=} \begin{vmatrix} 1 & -x & -b \\ 0 & -x^2 & -a-bx \\ 0 & 1 & -c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x^2 & -bx-a \\ 1 & -c \end{vmatrix} = cx^2+bx+a$ //

(4) $(与式) \overset{②-①}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & x \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & x-1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{④を1行ずつ入れ換え}{=} (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & x \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & x-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ -1 & x & 1 \\ x-1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$\underset{サラスより}{=} -(-x-x^2(x-1)+1) = x^3-x^2+x-1$ //

他は省略

3. $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{13} & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{23} & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{43} & a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} & 0 & 0 \\ a_{23} & a_{24} & 0 & 0 \\ a_{33} & a_{34} & a_{31} & a_{32} \\ a_{43} & a_{44} & a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$

従って $|A| = \begin{vmatrix} A_{12} & O \\ A_{22} & A_{21} \end{vmatrix}$ となる. 定理16.2より $|A| = |A_{12}||A_{21}|$ となる. ▨

4.(1) $n=2k$ とすると

$$(\text{左辺}) = \begin{vmatrix} & & & & a_1 \\ & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & O & a_k & & \\ & a_{k+1} & O & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \\ a_{2k} & & & & \end{vmatrix}$$

$1 \leftrightarrow 2k$, $2 \leftrightarrow 2k-1$, $\cdots$, $k \leftrightarrow k+1$ と計 k 回入れ換える

$$= (-1)^k \begin{vmatrix} a_{2k} & & & & & O \\ & a_{2k-1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & a_{k+1} & & \\ & & & & a_k & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & a_2 \\ O & & & & & & & a_1 \end{vmatrix}$$

$= (-1)^k a_{2k} a_{2k-1} \cdots a_{k+1} a_k \cdots a_2 a_1$

$= (-1)^{\frac{n}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n. = (\text{右辺}).$ ▨

(2) $n=2k+1$ とすると

$$(\text{左辺}) = \begin{vmatrix} & & & & & a_1 \\ & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & & a_k & & \\ & & a_{k+1} & & & \\ & a_{k+2} & & & & \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & & \\ a_{2k+1} & & & & & \end{vmatrix}$$

$1 \leftrightarrow 2k+1$, $2 \leftrightarrow 2k$, $\cdots$, $k \leftrightarrow k+2$ と計 k 回入れ換える.

$$= (-1)^k \begin{vmatrix} a_{2k+1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{k+2} & & \\ & & & a_{k+1} & \\ & & & & a_k \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & a_1 \end{vmatrix}$$

$= (-1)^k a_{2k+1} a_{2k} \cdots a_{k+2} a_{k+1} a_k \cdots a_2 a_1$

$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n. = (\text{右辺})$ ▨

1. $a_1 = {}^t[a,0,0,0]$, $a_2 = {}^t[0,b,0,0]$, $a_3 = {}^t[0,0,c,0]$, $a_4 = {}^t[0,0,0,d]$ と置く. 定理17.1より

(左辺) $= \left| a_4, a_2, a_1, a_3 \right| = \mathrm{sgn}(4,2,1,3) \left| a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \right| =$ (右辺).

順列 $(4,2,1,3)$ の転倒数は4より $\mathrm{sgn}(4,2,1,3) = (-1)^4 = +1$. 又 $|a_1\, a_2\, a_3\, a_4|$
$= abcd$ より (左辺) $= abcd$ //

2. 容易なので省略.

3. 定理17.2より $|A||B| = |AB| = |-2E|$. §15の問題3 (p.68) より $|-2E| = (-2)^3|E|$
$= -8$ だから $|A||B| = -8$ 故に $|B| = -\dfrac{8}{|A|}$ // ∎

4. $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$ と置く. $|A| = 0^3 + abc + bac - b\cdot 0\cdot b - 0\cdot c\cdot c - a\cdot a\cdot 0 = 2abc$

と定理17.2より

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2 & bc & ac \\ bc & a^2+c^2 & ab \\ ac & ab & b^2+c^2 \end{vmatrix} = |A^2| = |A|^2 = (2abc)^2$$ ∎

5. 定理17.2, (15.1) 及び §15の問題3 より

$|{}^tAA| = |{}^tA||A| = |A|^2 \geq 0$. $|{}^tAA| = |cE| = c^n|E| = c^n$

故に $c^n \geq 0$. 仮定より n は奇数だから. $c^n \geq 0$ より $c \geq 0$ となる事が分かる. ∎