P.5 1 省略（解答参照）

P.5 2. 省略（解答参照）

P.5 3. (1) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -2-1 \\ 3-(-1) \\ 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2+4^2+(-1)^2} = \sqrt{26}$

(2) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -7-0 \\ 1-1 \\ 0-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-7)^2+0^2+(-3)^2} = \sqrt{58}$

※ P.3 (1.3)(1.4) の使い方の練習です.

P.5 4. (1) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-(-1))^2 = (\sqrt{3})^2$. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2 = 3$

(2) 半径を r とすると $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 = r^2$ と表わせれる. 点 $(1.1.0)$ を通るので

$(1-1)^2+(1-2)^2+(0-1)^2 = r^2$, $r^2=2$. $\therefore$ $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 = 2$

(3) 中心の座標を $(a.b.c)$ とすると $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = 2^2$ となる. 3点を通るという事より

$$\begin{cases} (-a)^2+(-b)^2+(-c)^2 = 4, \\ (2-a)^2+(-b)^2+(-c)^2 = 4 \\ (1-a)^2+(1-b)^2+(-c)^2 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 4 & \cdots ① \\ -4a+a^2+b^2+c^2 = 0 & \cdots ② \\ -2a+a^2-2b+b^2+c^2 = 2 & \cdots ③ \end{cases}$$

①.② より $a=1$. ①.③ 及び $a=1$ より $-2a-2b+4=2$. $b=0$

再び ① より $1^2+0^2+c^2=4$. $c=\pm\sqrt{3}$

$\therefore$ $(x-1)^2+y^2+(z-\sqrt{3})^2 = 4$ または $(x-1)^2+y^2+(z+\sqrt{3})^2 = 4$

※ P.4 (1.5) を使う練習. P.164 の解答は展開したものだが, 上のように展開しなくともよい.

No. Date . .

P.5 5

(1) $x^2+2x+y^2+z^2-3z=\frac{3}{4}$ ←(各変数毎にまとめる)

$x^2+2x+1+y^2+z^2-2\cdot\frac{3}{2}z+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}+1+\left(\frac{3}{2}\right)^2$ ←(各変数毎に「$x^2-2ax+a^2$」という形になるよう調整)

$(x+1)^2+y^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=2^2$

最後の式の形より 中心は $(-1, 0, \frac{3}{2})$〃, 半径は2〃 ←(方程式の形 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ より 中心 (a, b, c), 半径 r を読みとる)

(2) $x^2-2x+y^2+5y+z^2-z=\frac{1}{2}$, $x^2-2x+1+y^2+5y+\left(\frac{5}{2}\right)^2+z^2-z+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1$

$(x-1)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=8=(2\sqrt{2})^2$

最後の式の形より 中心 $(1, -\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$, 半径 $2\sqrt{2}$〃

※ 展開された式を p.4 (1.5) の形にまとめ直す練習. ここで必要なのが"平方完成"という方法. 公式「$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$」を使って 2乗の形に直す.

P.10 1. (1) $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} -2-1 \\ 1-(-1) \\ 3-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\quad 2\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$〃

(2) $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$. $\quad -\frac{1}{2}\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$〃

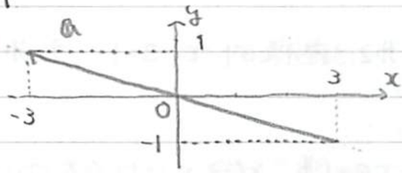
P.10 2. $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$, $\quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$. 及び $\overrightarrow{OP} = \mathbb{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \mathbb{b}$ より
$\overrightarrow{PQ} = \mathbb{b} - \mathbb{a}$〃

P.10 3.
$\mathbb{c} = r\mathbb{a} + s\mathbb{b}$, $\quad \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r+2s \\ r+s \end{bmatrix}$

より r, s は連立1次方程式 $\begin{cases} -r+2s=8 \\ r+s=1 \end{cases}$ を満たす. これを解いて $r=-2$, $s=3$〃

P.10 4.

(1)

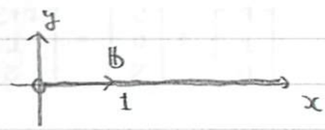


$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{cases} x=-3r \\ y=r \end{cases}$

より $y=-\frac{1}{3}x$. また $-1 \leq r \leq 1$ より
$3 \geq -3r = x \geq -3$.

従って 直線 $y=-\frac{1}{3}x$ 上の $-3 \leq x \leq 3$ の部分を表わす.

(2)

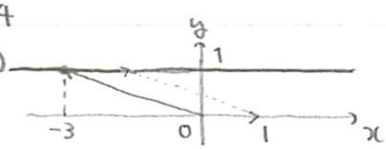


$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\quad \begin{cases} x=s \\ y=0 \end{cases}$

$x=s>0$ より (原点を除く)
x軸の正の部分を表わす.

P.10 4

(3)



$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+t \\ 1 \end{bmatrix}$

tは任意だから x座標は任意.
従って 直線 $y=1$ を表わす.

(4) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3t+u \\ t \end{bmatrix}$ (t, uは任意)

今, 平面上の任意の点 (x, y) が与えられるとき,
$t=y$, $u=x+3y$ と置けば

$t\mathbf{a}+u\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3y \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x+3y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

となり, これより $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を用いて点 (x, y) を表わす事が出来る. すなわち $t\mathbf{a}+u\mathbf{b}$ により平面全体を表わす事が出来る.

※ 4 はベクトルと係数(=パラメータ)により図形を表現する練習. 平面上の図形を数式で表現する為の基本的な問題なので, しっかり理解して下さい.

P.10 5

(1) $3\mathbf{a}-2\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ //

(2) $\begin{bmatrix} r \\ r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r+s \\ r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ だとする. 第2,3座標より $r=s=1$. 一方, 第1座標より $r+s=0$ となるが, これは矛盾する. 故に $\mathbf{c} = r\mathbf{a}+s\mathbf{b}$ となる r, s は存在しない.

Date . . No.

P.13 1. (1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (-1)\cdot 4 + 3\cdot(-1) = -7$ //

(2) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(-1)^2+3^2} = \sqrt{10}$ // $\quad |\boldsymbol{b}| = \sqrt{4^2+(-1)^2} = \sqrt{17}$ //

(3) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ より $\cos\theta = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})/|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| = -7/\sqrt{10}\cdot\sqrt{17} = -\frac{7}{\sqrt{170}}$ //

(4) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}, -\boldsymbol{b}) = -\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\} = -\frac{1}{2}\{(-7)+2\cdot 17\} = -\frac{27}{2}$ //

※ 内積の記号には $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ の他に $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{b} \rangle$, … というものがある.

※ 内積の定義式は

① $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$の内積　② $\boldsymbol{a}$の長さ　③ $\boldsymbol{b}$の長さ　④ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$間の余弦(または角)

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

という4つの情報量からなる.『4つのうち, 3つの情報があれば 4つ目の情報は定義式より得られる』という使い方をする((3)参照).

※ (4)は $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$, $-\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ を求めて, その内積を計算してもよいが, 出題者の意図は p.12 中段 の基本性質の練習 だと思われる.

P.13. 2 (1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 1\cdot(-2) + (-2)\cdot 1 + 2\cdot 1 = -2$ //

(2) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = 3$ // $\quad |\boldsymbol{b}| = \sqrt{(-2)^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$ //

(3) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$, $-2 = 3\cdot\sqrt{6}\cos\theta$. $\quad \therefore \cos\theta = -\frac{2}{3\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{9}$ //

No. Date . .

P.13 3 (1) $|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = 3$ より $\mathbf{a}$と同じ方向, 向きの単位ベクトルは

$$\frac{1}{|\mathbf{a}|}\cdot\mathbf{a} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/3\\-2/3\\2/3\end{bmatrix}_{/\!/}$$

(2) (1)のベクトルを $\mathbf{n}$ とする. このとき $(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) = \frac{1}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{e}_1|\cos\alpha = \cos\alpha$, 及び

$(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) = (1/3)\cdot 1 + (-2/3)\cdot 0 + (2/3)\cdot 0 = 1/3$ より $\cos\alpha = \frac{1}{3}{}_{/\!/}$ 同様にすれば

$\cos\beta = (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) = -\frac{2}{3}{}_{/\!/}$ $\cos\gamma = (\mathbf{n}, \mathbf{e}_3) = \frac{2}{3}{}_{/\!/}$

P.13 4 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ より

$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \Leftrightarrow |\cos\theta| = 1 \Leftrightarrow \theta = 0, \pi$ ($0 \leq \theta < 2\pi$ に限定した場合)

すなわち, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が平行な場合のみ等号成立.

P.13 5. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \Leftrightarrow |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2$.

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b}) &= (\mathbf{a}, \mathbf{a}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{a}) + (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \\ &= |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2\end{aligned}$$

より $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \Leftrightarrow \cos\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0$
すなわち $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行で, かつ同じ向きの場合にのみ等号成立.

P.16. 1. 直線上の点 P (x, y, z) の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする.

(1). $\boldsymbol{x}$ は実数 s を用いて $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ と表わされる.

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{cases} x = -2+s \\ y = 1+2s \\ z = 3-2s \end{cases}$, $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-2} = s$

従って求める方程式は $x+2 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-2}$ //

(2). x 軸に平行な直線は方向ベクトルとして $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を持つので, $\boldsymbol{x}$ は実数 s を用いて

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{cases} x = -2+s \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ と表わされる. s は任意なので x も任意.

従って点 P がこの直線上にある為には, $y=1, z=3$ となる事が必要十分条件となる.
すなわち求める方程式は $y=1, z=3$ // となる.

上と同様にすれば y 軸, z 軸に平行な直線については方向ベクトルをそれぞれ
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とすればよい. 従って求める方程式は

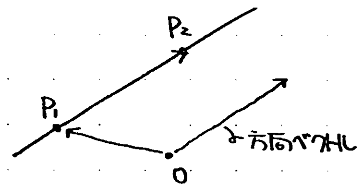
y 軸に平行な直線 : $x=-2, z=3$ //　　z 軸に平行な直線 : $x=-2, y=1$ //

(3). 直線 $y=4x$ の方向ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ だから $\boldsymbol{x}$ は実数 s を用いて

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{cases} x = -2+s \\ y = 1+4s \\ z = 3 \end{cases}$, $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{4} = s$, $z=3$.

従って求める方程式は $x+2 = \frac{y-1}{4}$, $z=3$ //

P.16 2. 求める直線は点 P_1 を通り、$\overrightarrow{P_1P_2}$ を方向ベクトルに持つ直線である.



(1) $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ より

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x = 1-3s \\ y = 1-s \\ z = s \end{cases} \quad \therefore \frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{-1} = z \;//$$

(2) $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$ より

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}. \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-7}{-8} \;//$$

P.16 3. 直線の方向を与える単位ベクトルを方向余弦と呼ぶ.

方程式の形より $a = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ が方向ベクトルとなる. $|a| = \sqrt{2^2+(-1)^2+4^2} = \sqrt{21}$ と合わせて

この直線の方向余弦は $\pm \frac{1}{|a|} a = \pm \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \;//$

P.16 4 (1) $\pm \frac{1}{\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+1^2}} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \;//$

(2) $\pm \frac{1}{\sqrt{4^2+2^2+(-8)^2}} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix} = \pm \frac{1}{2\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \;//$

Date . . No.

P.20 1.

(1) ① $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ は法線ベクトルである．これを正規化すると $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ //

② $d = \frac{|1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ // （(5.7) 参照）

③ $d = \frac{|2(-1)-1-2+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$ // （(5.8) 参照）

(2) ① $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ は法線ベクトルである．これを正規化すると $\pm\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ //

② $d = \frac{|2|}{\sqrt{1^2+3^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{11}}$ //　　③ $d = \frac{|-1+3\cdot1-2+2|}{\sqrt{1^2+3^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{11}}$ //

P.20 2.

求める平面の方程式は $2x+y-z+d=0$ という形に表わされる．ここで原点と平面との距離の公式を用いれば仮定より

$$\frac{|d|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = 1 \qquad \therefore\ d = \pm\sqrt{6}$$

故に求める方程式は $2x+y-z+\sqrt{6}=0$ // または $2x+y-z-\sqrt{6}=0$ //

P.20. 3.

α の単位法線ベクトルは $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\beta$ の単位法線ベクトルは $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ により与えられる．

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}} = \pm\frac{2}{3\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$$ //

No. Date

P.20 4. 交線上の点の座標(x,y,z)は実数tを用いて $x=at+x_0$, $y=bt+y_0$, $z=ct$ と表わされる. 又, (x,y,z)はα, βの方程式を同時に満たす. 即ち

$$\begin{cases} (at+x_0)+(bt+y_0)+ct=1 \\ 2(at+x_0)-(bt+y_0)+ct=-1 \end{cases} \text{即ち} \begin{cases} (a+b+c)t+x_0+y_0=1 \\ (2a-b+c)t+2x_0-y_0=-1 \end{cases} \cdots (*)_t$$

となる. 今, $t=0$だとすれば x_0, y_0は連立方程式 $\begin{cases} x_0+y_0=1 \\ 2x_0-y_0=-1 \end{cases}$ を満たす. これを解いて $x_0=0$, $y_0=1$. 次に $t=1$とすれば

$$(*)_1 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 & \cdots ① \\ 2a-b+c=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①+②より $3a+2c=0$, $c=-\frac{3}{2}a$. ①-②より $-a+2b=0$, $b=\frac{1}{2}a$. ここで $a=2$とすれば $b=1$, $c=-3$ となる.

以上より交線の方程式は $\frac{x}{2}=y-1=\frac{z}{-3}$ //