§5.5 (p.138)

1. 次の 3 重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iiint_V (x+y)e^z dxdydz, \qquad V=\{(x,y,z)\mid 0\le z\le 1,\ 1\le y\le z^{-\frac{1}{3}},\ 0\le x\le yz\}.$

(2) $\displaystyle\iiint_V (x+2y+z)dxdydz, \qquad V=\{(x,y,z)\mid 0\le x,\ 0\le y,\ 0\le z,\ x+y+z\le 1\}.$

(3) $\displaystyle\iiint_V xyzdxdydz, \qquad V=\{(x,y,z)\mid 0\le x,\ 0\le y,\ 0\le z,\ x^2+y^2+z^2\le 1\}.$

【解答】 求める積分を I と記す．

(1) V の表示と p.134 **定理 5.5.8** より

$$I=\int_0^1\left(\int_1^{z^{-\frac{1}{3}}}\left(\int_0^{yz}(x+y)e^z dx\right)dy\right)dz=\int_0^1 e^z\left(\int_1^{z^{-\frac{1}{3}}}\left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_0^{yz}dy\right)dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 e^z(z^2+2z)\left(\int_1^{z^{-\frac{1}{3}}}y^2dy\right)dz=\frac{1}{2}\int_0^1 e^z(z^2+2z)\left[\frac{y^3}{3}\right]_1^{z^{-\frac{1}{3}}}dz=-\frac{1}{6}\int_0^1 e^z(z^2+z-2)dz=\frac{e-1}{6}$$

(2) $V=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le 1-x-y\}$ と表されるから，

$$I=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y}(x+2y+z)dz\right)dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left[(x+2y)z+\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-x-y}dy\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^{1-x}(1-x^2+2(1-2x)y-3y^2)dy\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left[(1-x^2)y+(1-2x)y^2-y^3\right]_0^{1-x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2dx=\frac{1}{6}$$

(3) $V=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le \sqrt{1-x^2},\ 0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\}$ と表されるから，

$$I=\int_0^1 x\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}zdz\right)dy\right)dx=\int_0^1 x\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}dy\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}((1-x^2)y-y^3)dy\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x\left[\frac{(1-x^2)}{2}y^2-\frac{y^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2dx=\frac{1}{8}\left[-\frac{1}{6}(1-x^2)^3\right]_0^1=\frac{1}{48}$$

□

2. 楕円体 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}\le 1$ の体積を 3 重積分を用いて求めよ．

【解答】 楕円体は xy yz zx 平面に関して対称だから

$$D=\left\{(x,y,z)\,\middle|\, x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}\le 1\right\}$$

の部分の体積を 8 倍すれば全体の体積になる． また

$$D=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\begin{array}{c}0\le x\le 2\\ 0\le y\le 3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\\ 0\le z\le 4\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\end{array}\right\}$$

と表される事より，求める体積 V は

$$
\begin{aligned}
V =&8\iiint_D 1dxdydz = 8\int_0^2\left(\int_0^{3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\left(\int_0^{4\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}}dz\right)dy\right)dx\\
=&8\int_0^2\left(\int_0^A\frac{4}{3}\sqrt{A^2-y^2}dy\right)dx = \frac{32}{3}\int_0^2\left[\frac{1}{2}\left(y\sqrt{A^2-y^2}+A^2\sin^{-1}\frac{y}{A}\right)\right]_0^A dx \qquad (A=3\sqrt{1-\tfrac{x^2}{4}} \text{ と置く})\\
=&\frac{8}{3}\pi\int_0^2 A^2dx = 6\pi\int_0^2\left(4-x^2\right)dx \quad = 6\pi\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 32\pi
\end{aligned}
$$

□

1. 次の広義 3 重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iiint_V \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}dxdydz,$

$V=\{(x,y,z)\mid 0\le x,\ 0\le y,\ 0\le z,\ x^2+y^2+z^2\le 4\}.$

(2) $\displaystyle\iiint_V \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}dxdydz, \qquad V=\{(x,y,z)\mid 0\le x,\ 0\le y,\ 1\le x^2+y^2+z^2\}.$

(3) $\displaystyle\iiint_V \frac{x^2+y^2+z^2}{e^{x^2+y^2+z^2}}dxdydz, \qquad V=\{(x,y,z)\mid 0\le x,\ 0\le y,\ 0\le z\}.$

【解答】 求める積分を I と記す．

(1) $0<\varepsilon<2$ に対し $V_\varepsilon=\{(x,y,z)\in V\mid \varepsilon\le x^2+y^2+z^2\}$ と置く．極座標 $x=r\cos\theta\sin\phi,\ y=r\sin\theta\sin\phi,\ x=r\cos\phi$ (p.138) に変換すると V_ε は

$$V'_\varepsilon=\{(r,\theta,\phi)\mid \varepsilon\le r\le 2,\ 0\le\theta\le\tfrac{\pi}{2},\ 0\le\phi\le\tfrac{\pi}{2}\}$$

に移るので

$$
\begin{aligned}
&\iiint_{V_\varepsilon}\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \iiint_{V'_\varepsilon}\frac{r(\cos\theta\sin\phi+\sin\theta\sin\phi+\cos\phi)}{r^2}r^2\sin\phi drd\theta d\phi\\
=&\left(\int_\varepsilon^2 rdr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{(\cos\theta+\sin\theta)\frac{1-\cos 2\phi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\phi\right\}d\phi\right]d\theta\right)\\
=&\frac{4-\varepsilon^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\cos\theta+\sin\theta)\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right\}d\theta = \frac{4-\varepsilon^2}{2}\times\frac{3\pi}{4}
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad I=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\iiint_{V_\varepsilon}\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\frac{4-\varepsilon^2}{2}\times\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$$

(2) $R>1$ に対し $V_R=\{(x,y,z)\in V\mid x^2+y^2+z^2\le R^2\}$ とすれば $I=\displaystyle\lim_{R\to\infty}\iiint_{V_R}\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$ である．被極限積分を極座標に変換すると

$$\iiint_{V_R}\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\iiint_{V'_R}\frac{|r^2\sin\phi|}{r^4}drd\theta d\phi, \qquad \left(V'_R=\left\{(r,\theta,\phi)\mid \begin{array}{c}0\le r\le R\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le\phi\le\pi\end{array}\right\}\right)$$

となり，更に

$$
\begin{aligned}
\iiint_{V'_R}\frac{|r^2\sin\phi|}{r^4}drd\theta d\phi &= \int_1^R\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^\pi\frac{\sin\phi}{r^2}d\phi\right)d\theta\right)dr\\
&=\frac{\pi}{2}\left(\int_1^R\frac{dr}{r^2}\right)\left(\int_0^\pi\sin\phi d\phi\right)=\pi\left(1-\frac{1}{r}\right)
\end{aligned}
$$

だから $I=\displaystyle\lim_{R\to\infty}\pi\left(1-\frac{1}{r^2}\right)=\pi.$

(3) $R>0$ に対し $V_R=\{(x,y,z)\in V\mid x^2+y^2+z^2\le R^2\}$ とすれば $I=\displaystyle\lim_{R\to\infty}\iiint_{V_R}\frac{x^2+y^2+z^2}{e^{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$ である．被極限積分を極座標に変換すると

$$\iiint_{V_R}\frac{x^2+y^2+z^2}{e^{x^2+y^2+z^2}}dxdydz\iiint_{V'_R}r^2e^{-r^2}|r^2\sin\phi|drd\theta d\phi, \qquad \left(V'_R=\left\{(r,\theta,\phi)\mid \begin{array}{c}0\le r\le R\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le\phi\le\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}\right)$$

となり，更に部分積分を用いれば

$$\begin{aligned}\iiint_{V_R'} r^2 e^{-r^2} |r^2 \sin\phi| dr d\theta d\phi, &= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^R r^4 e^{-r^2} dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi d\phi\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\left[r^3\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\right]_0^R + \frac{1}{2}\int_0^R 3r^2 e^{-r^2} dr\right) \\ &= \frac{\pi}{4}\left\{-R^3 e^{-R^2} + 3\left(\left[r\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\right]_0^R + \frac{1}{2}\int_0^R e^{-r^2} dr\right)\right\} \\ &= \frac{\pi}{4}\left\{-R^3 e^{-R^2} - \frac{3}{2}Re^{-R^2} + \frac{3}{2}\int_0^R e^{-r^2} dr\right\}\end{aligned}$$

ここで $R \to \infty$ とすれば，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-r^2} dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ より $\displaystyle I = \frac{\pi}{4}\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\pi\sqrt{\pi}}{16}$ □