

§5.4 (p.132)

1. 次の立体図形の体積を求めよ.

- (1) 楕円体 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} \leq 1$.
- (2) 円柱面 $x^2 + y^2 = 4$ と 2 平面 $x + y + z = 0, z = 0$ で囲まれた立体.
- (3) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ と円柱面 $x^2 + y^2 = 1$ で囲まれた 2 つの立体.
- (4) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ と放物面 $z = x^2 + y^2$ で囲まれた 2 つの立体.
- (5) 放物面 $z = x^2 + y^2$, 円柱面 $x^2 - x + y^2 = 1$ 及び $z = 0$ で囲まれた立体.
- (6) 円柱面 $x^2 + y^2 = 1$, 曲面 $z = xy$ 及び $z = 0$ で囲まれた立体.

【解答】(1) 楕円体を V とする. $(x, y, z) \in V$ ならば $(\pm x, \pm y, \pm z) \in V$ となる事に注意すれば $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ となる領域内にある V の部分の体積

$$V_0 = \iint_D 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} dx dy \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$$

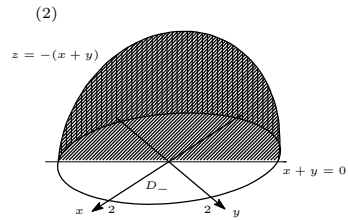
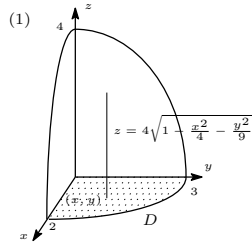
を 8 倍すれば V 全体の体積となる. $x = 2r \cos \theta, y = 3r \sin \theta \quad E = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$ と置けば,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos \theta & -2r \sin \theta \\ 3 \sin \theta & 3r \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = 6r$$

と変数変換公式より

$$\begin{aligned} V_0 &= 4 \iint_E \sqrt{1 - \frac{(2r \cos \theta)^2}{4} - \frac{(3r \sin \theta)^2}{9}} \mathbf{abs} \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right) dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \sqrt{1 - r^2} 6r dr \right) d\theta = 12\pi \left[-\frac{1}{3}(1 - r^2)^{3/2} \right]_0^1 = 4\pi. \end{aligned}$$

従って V 全体の体積は $8 \times V_0 = 32\pi$.



(2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, $D_{\pm} = \{(x, y) \in D : \pm(x + y) \leq 0\}$ とする. $(x, y) \in D_+$ ならば $z = -(x + y) \geq 0$, $(x, y) \in D_-$ ならば $z = -(x + y) \leq 0$ だから, 求める体積 V は

$$V = \iint_D |z| dx dy = \iint_{D_+} z dx dy + \iint_{D_-} (-z) dx dy$$

となる. $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, E_+ = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 2, \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{4}\}, E_- = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 2, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}\}$ とすれば, 変数変換公式より

$$\begin{aligned} \iint_{D_+} z dx dy &= \iint_{E_+} -(r \cos \theta + r \sin \theta) |r| dr d\theta \\ &= - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \cdot \int_0^2 r^2 dr = \frac{16}{3} \sqrt{2}, \\ \iint_{D_-} (-z) dx dy &= \iint_{E_-} (r \cos \theta + r \sin \theta) |r| dr d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \cdot \int_0^2 r^2 dr = \frac{16}{3} \sqrt{2}, \quad \therefore V = \frac{32}{3} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

(3) $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ とすれば, 円柱面の内側にある立体の体積 V_1 は

$$V_1 = \iint_{D_1} (\sqrt{4 - x^2 - y^2} - (-\sqrt{4 - x^2 - y^2})) dx dy = 2 \iint_{D_1} \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$$

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, E_1 = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ とすれば変数変換公式より

$$V_1 = 2 \iint_{E_1} \sqrt{4-r^2} |r| dr d\theta = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 r \sqrt{4-r^2} dr = 4\pi \left[-\frac{1}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \left(\frac{32}{3} - 4\sqrt{3} \right) \pi.$$

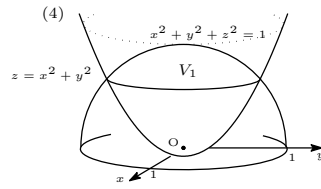
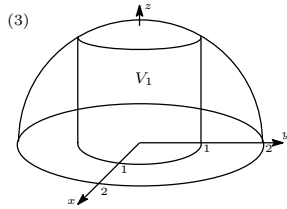
一方, $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ とすれば, 円柱面の外側にある立体の体積 V_2 は

$$V_2 = \iint_{D_2} \left(\sqrt{4-x^2-y^2} - (-\sqrt{4-x^2-y^2}) \right) dx dy = 2 \iint_{D_2} \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy$$

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, E_2 = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ とすれば変数変換公式より

$$V_2 = 2 \iint_{E_2} \sqrt{4-r^2} |r| dr d\theta = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_1^2 r \sqrt{4-r^2} dr = 4\pi \left[-\frac{1}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = 4\sqrt{3}\pi.$$

※ V_2 は球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ より V_1 の部分を除けばよいから, $V_2 = \frac{4}{3}(2)^3\pi - V_1 = 4\sqrt{3}\pi$ としてもよい.



(4) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ と $z = x^2 + y^2$ の共通部分は $x^2 + y^2 = z = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ となる事に注意して, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}\}$ とすれば, 放物面の上側にある立体の体積 V_1 は

$$V_1 = \iint_D \left(\sqrt{1-x^2-y^2} - (x^2 + y^2) \right) dx dy$$

となる. $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, E = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ ($R^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$) とすれば変数変換公式より

$$\begin{aligned} V_1 &= \iint_E (\sqrt{1-r^2} - r^2) |r| dr d\theta = 2\pi \int_0^R (r\sqrt{1-r^2} - r^3) dr \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}r^4 \right]_0^R = 2\pi \left\{ \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) - \frac{3-\sqrt{5}}{8} \right\}. \end{aligned}$$

一方, 放物面の下側にある立体の体積 V_2 は球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ より V_1 を除けばよいから

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi - V_1 = \frac{4}{3}\pi - 2\pi \left\{ \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) - \frac{3-\sqrt{5}}{8} \right\}$$

(5) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - x + y^2 \leq 1\}$ とすれば立体の体積は $V = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$. ここで $x = \frac{1}{2} + r \cos \theta, y = r \sin \theta, E = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{5}}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ とすれば

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = |r|$$

と変数変換公式より

$$\begin{aligned} V &= \iint_E \left\{ \left(\frac{1}{2} + r \cos \theta \right)^2 + (r \sin \theta)^2 \right\} |r| dr d\theta = \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\frac{r}{4} + 2r^2 \cos \theta + r^3 \right) d\theta \right\} dr \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \left[\frac{r}{4} + 2r^2 \sin \theta + r^3 \theta \right]_0^{2\pi} dr = \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} (\pi r + 2\pi r^3) dr = \left[\frac{\pi^2}{4} r + \frac{r^4}{2} \pi \right]_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{35}{32} \pi \end{aligned}$$

(6) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ とし,

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in D : x, y \geq 0\}, & D_2 &= \{(x, y) \in D : x \leq 0, y \geq 0\}, \\ D_3 &= \{(x, y) \in D : x, y \leq 0\}, & D_4 &= \{(x, y) \in D : x \geq 0, y \leq 0\} \end{aligned}$$

とすれば立体の体積は

$$V = \iint_D |z| dx dy = \iint_{D_1 \cup D_3} xy dx dy - \iint_{D_2 \cup D_4} xy dx dy$$

となる. ここで $x = \frac{1}{2} + r \cos \theta, y = r \sin \theta, E = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ とし,

$$E_1 = \{(r, \theta) \in E : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}, \quad E_2 = \{(r, \theta) \in E : \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\}, \\ E_3 = \{(r, \theta) \in E : \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}\}, \quad E_4 = \{(r, \theta) \in E : \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi\}$$

とすれば

$$\iint_{D_1 \cup D_3} xy dx dy = \iint_{E_1 \cup E_3} r^2 \cos \theta \sin \theta |r| dr d\theta = \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \right\} \cos \theta \sin \theta d\theta \cdot \int_0^1 r^3 dr \\ = \frac{1}{4} \left\{ \left[-\frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \right\} = \frac{1}{4}$$

$$\iint_{D_2 \cup D_4} (-xy) dx dy = - \iint_{E_2 \cup E_4} r^2 \cos \theta \sin \theta |r| dr d\theta = - \left\{ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \right\} \cos \theta \sin \theta d\theta \cdot \int_0^1 r^3 dr \\ = -\frac{1}{4} \left\{ \left[-\frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[-\frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \right\} = \frac{1}{4}$$

だから $V = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ となる. □

2. 次の図形の表面積を求めよ.

- (1) 平面 $x + y + z = k$ (k は正の定数) の第 1 象限 $0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z$ の部分の平面図形.
- (2) 曲面 $z = \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4}$ の $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ の部分.
- (3) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ と放物面 $z = x^2 + y^2$ で囲まれた 2 つの立体.
- (4) 放物面 $z = x^2 + y^2$ の $z \leq 1$ の部分.
- (5) 曲面 $z = xy$ の $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ の部分.

【解答】 求める表面積を S と記す.

(1) $D = \{(x, y) \mid x + y \leq k, x, y \geq 0\}$ とすれば $z = k - x - y$ だから

$$S = \int_D \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dx dy = \sqrt{3} \int_D dx dy = \sqrt{3} \times \frac{k^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} k^2.$$

(2) $D = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ とすれば $S = \int_D \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + 1} dx dy$. $x = 3r \cos \theta, y = 2r \sin \theta$ とすれば $\det \theta(x, y) / \theta(r, \theta) = 6r$ であり, D は $D' = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ に変換される. 従って

$$S = \int_D \sqrt{r^2 + 1} |6r| dr d\theta = 2 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 3r \sqrt{r^2 + 1} dr \right) = 4\pi [(r^2 + 1)^{3/2}]_0^1 = 4\pi(2\sqrt{2} - 1)$$

(3) $a = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ とする. 立体は球面上にある表面 S_1 と放物面上にある S_2 により囲まれているから

$$S = S_1 + S_2 = \iint_D \sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}} dx dy + \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy$$

となる. これらを極座標に変換すれば

$$S = \iint_{D'} (1-r^2)^{-1/2} |r| dr d\theta + \iint_{D'} (4r^2+1)^{1/2} |r| dr d\theta \quad (D' = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\})$$

となる. 各項を計算すると

$$\iint_{D'} (1-r^2)^{-1/2} |r| dr d\theta = 2\pi \int_0^a r(1-r^2)^{-1/2} dr = [-(1-r^2)^{1/2}]_0^a = 1 - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

$$\iint_{D'} (4r^2+1)^{1/2} |r| dr d\theta = 2\pi \int_0^a r(4r^2+1)^{1/2} dr = \left[\frac{1}{12} (4r^2+1)^{3/2} \right]_0^a = \frac{1}{12} ((2\sqrt{5}-1)^{3/2} - 1)$$

$$\therefore S = 2\pi \left(\frac{11}{12} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + \frac{1}{12}(2\sqrt{5}-1)^{3/2} \right).$$

(4) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $D' = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ とすると

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy = \iint_{D'} \sqrt{4r^2 + 1} |r| dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 r \sqrt{4r^2 + 1} dr = 2\pi \left[\frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} \pi \end{aligned}$$

(5) 被積分関数, 及び積分領域が $y = x$ に関し対称である事に注意して, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$ と置く.
 $z_x = y$, $z_y = x$ より $\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} = \sqrt{y^2 + x^2 + 1}$ だから p.57 公式 3.1.11 (3) より

$$\begin{aligned} S &= 2 \iint_D \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dx dy = 2 \int_0^2 \left(\int_0^x \sqrt{x^2 + y^2 + 1} dy \right) dx \\ &= \int_0^2 \left[y \sqrt{x^2 + y^2 + 1} + (x^2 + 1) \log |y + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}| \right]_0^x dx \\ &= \underbrace{\int_0^2 x \sqrt{2x^2 + 1} dx}_I + \underbrace{\int_0^2 (x^2 + 1) \log |x + \sqrt{2x^2 + 1}| dx}_II - \underbrace{\int_0^2 (x^2 + 1) \log \sqrt{x^2 + 1} dx}_III \end{aligned}$$

I について: $I = \left[\frac{1}{6} (2x^2 + 1)^{3/2} \right]_0^2 = \frac{13}{3}$.

II について: 部分積分を実行の後, 分母の有理化を行い整理すると

$$\begin{aligned} II &= \left[\left(\frac{x^3}{3} + x \right) \log |x + \sqrt{2x^2 + 1}| \right]_0^2 - \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \frac{1}{x + \sqrt{2x^2 + 1}} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} + 2x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx \\ &= \frac{14}{3} \log 5 - \frac{1}{3} \int_0^2 \left(x^2 + 2 - \frac{2}{x^2 + 1} + \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 1}} + \frac{2x}{(x^2 + 1)\sqrt{2x^2 + 1}} \right) dx \\ &= \frac{14}{3} \log 5 - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} + 2x - 2 \tan^{-1} x + \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + 1} \right]_0^2 - \frac{1}{3} \int_0^2 \frac{2x}{(x^2 + 1)\sqrt{2x^2 + 1}} dx \\ &= \frac{14}{3} \log 5 + \frac{2}{3} \tan^{-1} 2 - \frac{23}{9} - \frac{1}{3} \int_0^2 \frac{2x}{(x^2 + 1)\sqrt{2x^2 + 1}} dx \end{aligned}$$

最後の項について $t = \sqrt{2x^2 + 1}$ と置換すれば

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 1} \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx = \int_1^3 \frac{2}{t^2 + 1} dt = 2 \tan^{-1} 3 - \frac{\pi}{2}.$$

従って

$$II = \frac{14}{3} \log 5 + \frac{2}{3} \tan^{-1} 2 - \frac{2}{3} \tan^{-1} 3 - \frac{23}{9} + \frac{\pi}{6}$$

III について: 部分積分より

$$\begin{aligned} III &= \frac{1}{2} \int_0^2 (x^2 + 1) \log(x^2 + 1) dx = \frac{1}{6} \left[(x^3 + 3x) \log(x^2 + 1) \right]_0^2 - \frac{1}{3} \int_0^2 \left(x^2 + 2 - \frac{2}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= \frac{7}{3} \log 5 - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} + 2x - 2 \tan^{-1} x \right]_0^2 \\ &= \frac{7}{3} \log 5 - \frac{20}{9} + \frac{2}{3} \tan^{-1} 2 \end{aligned}$$

以上の計算より

$$\begin{aligned} S &= \frac{13}{3} + \left(\frac{14}{3} \log 5 + \frac{2}{3} \tan^{-1} 2 - \frac{2}{3} \tan^{-1} 3 - \frac{23}{9} + \frac{\pi}{6} \right) - \left(\frac{7}{3} \log 5 - \frac{20}{9} + \frac{2}{3} \tan^{-1} 2 \right) \\ &= 4 + \frac{\pi}{6} + \frac{7}{3} \log 5 - \frac{2}{3} \tan^{-1} 3 \end{aligned}$$

※ $\theta = \frac{\pi}{2} - 2 \tan^{-1} 3$ と置くと $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$ より

$$\tan \theta = \cot(2 \tan^{-1} 3) = \frac{\cos^2 \tan^{-1} 3 - \sin^2 \tan^{-1} 3}{2 \cos \tan^{-1} 3 \cdot \sin \tan^{-1} 3} = \frac{1 - \tan^2 \tan^{-1} 3}{2 \tan \tan^{-1} 3} = \frac{1 - 9}{2 \cdot 3} = -\frac{4}{3}$$

従って $\frac{\pi}{2} - 2 \tan^{-1} 3 = -\tan^{-1} \frac{4}{3}$ と表される. これより $S = 4 + \frac{7}{3} \log 5 - \frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{4}{3}$ と表してもよい. □

3. 次の広義積分の値を求めよ.

$$(1) \iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

$$(2) \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x, 0 \leq y, 1 \leq x^2+y^2\}.$$

$$(3) \iint_D \frac{x^2 y^2}{e^{x^2+y^2}} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x, 0 \leq y\}.$$

【解答】 求める積分を I と記す.

(1) 被積分関数及び積分領域は直線 $y = x$ に関し対称だから、 $D' = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ とすれば $I = 2 \iint_{D'} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy$ となる. 任意の $0 < \varepsilon < 1$ に対して $D_\varepsilon = D' - \{(x, y) \in D \mid 0 \leq x < \varepsilon\}$ とすれば

$$\begin{aligned} \iint_{D_\varepsilon} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy &= \int_\varepsilon^1 \left(\int_0^x \frac{x+y}{x^2+y^2} dy \right) dx = \int_\varepsilon^1 \left[\tan^{-1} \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) \right]_0^x dx \\ &= \int_\varepsilon^1 \left(\tan^{-1} 1 + \frac{1}{2} \log 2 \right) dx = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\log 2}{2} \right) (1 - \varepsilon). \end{aligned}$$

$$\therefore I = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy = \frac{\pi}{2} + \log 2$$

(2) 任意の $1 < R$ に対して $D_R = \{(x, y) \in D \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq R^2\}$, $D'_R = \{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ とすれば

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D_R} \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D'_R} \frac{|r| dr d\theta}{r^4} \\ &= \frac{\pi}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dr}{r^3} = \frac{\pi}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2r^2} \right]_1^R = \frac{\pi}{4} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{R^2} \right) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(3) 任意の $0 < R$ に対して $D_R = \{(x, y) \in D \mid 0 \leq x^2+y^2 \leq R^2\}$, $D'_R = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ とすれば

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D_R} \frac{x^2 y^2}{e^{x^2+y^2}} dx dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D'_R} \frac{r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{e^{r^2}} |r| dr d\theta \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \cdot \int_0^R r^5 e^{-r^2} dr \right\} \stackrel{t=r^2 \text{ と置換}}{=} \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} d\theta \times \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{R^2} t^2 e^{-t} \frac{dt}{2} \\ &= \frac{\pi}{16} \times \lim_{R \rightarrow \infty} (1 - (R^4 + 2R^2 + 1)e^{-R^2}) = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

□

4. 極座標で表された関数 $z = f(r, \theta)$ の領域 D での表面積は

$$\iint_D \sqrt{r^2 + r^2 \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2} dr d\theta$$

で表される事を示せ.

【証明】 $r z_r = z_x r \cos \theta + z_y r \sin \theta$, $z_\theta = -z_x r \sin \theta + z_y r \cos \theta$ を逆に解いて

$$\begin{aligned} z_x &= z_r \cos \theta - \frac{z_\theta}{r} \sin \theta, & z_y &= z_r \sin \theta + \frac{z_\theta}{r} \cos \theta \\ z_x^2 &= z_r^2 \cos^2 \theta - 2 \frac{\cos \theta}{r} z_r z_\theta + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} z_\theta^2, & z_y^2 &= z_r^2 \sin^2 \theta + 2 \frac{\cos \theta}{r} z_r z_\theta + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} z_\theta^2 \end{aligned}$$

従って極座標によって xy 平面の図形 D' が $r\theta$ 平面の図形 D に移されるとすれば座標変換公式により

$$\iint_{D'} \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dx dy = \iint_D \sqrt{z_r^2 + \frac{z_\theta^2}{r^2} + 1} r dr d\theta = \iint_D \sqrt{r^2 + r^2 z_r^2 + z_\theta^2} dr d\theta.$$

□

5. Gamma 関数 $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ ($s > 0$) について次の式が成立する事を示せ. *1

(1) $m, n > 0$ のとき, Beta 関数 $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ について次の等式が成立:

$$B(m, n) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta d\theta.$$

(2) $B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$

(3) (Gamma 関数の特殊値) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

(4) (Gamma 関数の 2 倍角の公式) $\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x} \sqrt{\pi} \Gamma(2x)$

【解答】(1) $x = \cos^2 \theta$ と置換すると

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\cos^2 \theta)^{m-1} (1 - \cos^2 \theta)^{n-1} (-2 \cos \theta \sin \theta) d\theta = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx.$$

これより題意の等式を得る.

(2) $x = s^2, y = t^2$ と置換すると

$$\begin{aligned} \Gamma(m)\Gamma(n) &= \int_0^\infty e^{-x} x^{m-1} dx \int_0^\infty e^{-y} y^{n-1} dy = 4 \int_0^\infty e^{-s^2} s^{2m-1} ds \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n-1} dt \\ &= 4 \iint_{s, t \geq 0} e^{-s^2-t^2} s^{2m-1} t^{2n-1} ds dt = 4 \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{[0, R] \times [0, R]} e^{-s^2-t^2} s^{2m-1} t^{2n-1} ds dt \end{aligned}$$

$R > 0$ に対し $e^{-s^2-t^2} s^{2m-1} t^{2n-1}$ の $[0, R] \times [0, R]$ 上の積分を I_R , $\{(x, y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, x, y \geq 0\}$ 上の積分を J_R とすると $J_R \leq I_R \leq J_{\sqrt{2}R}$ が成立する. 積分 J_R について, 極座標 $s = r \cos \theta, t = r \sin \theta$ に変換すれば

$$\begin{aligned} J_R &= \iint_{D_R} e^{-r^2} r^{2m-1} \cos^{2m-1} \theta \cdot r^{2n-1} \sin^{2n-1} \theta |r| dr d\theta \quad (D_R = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}) \\ &= \left(\frac{1}{2} \int_0^R e^{-x} x^{m+n-1} dx\right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta d\theta\right) = \frac{B(m, n)}{4} \int_0^R e^{-x} x^{m+n-1} dx \quad (r^2 = x \text{ と置換}) \end{aligned}$$

となる. 最右辺の積分は $R \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{2} \int_0^R e^{-x} x^{m+n-1} dx \rightarrow \frac{1}{2} \Gamma(m+n)$ となるから, はさみ打ちの原理より

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \lim_{R \rightarrow \infty} J_R = \frac{B(m, n)}{4} \Gamma(m+n)$$

が成立. 従って $\Gamma(m)\Gamma(n) = B(m, n)\Gamma(m+n)$ が成立する.

(3) (1) の関係式より $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \Gamma(1)B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ が成立. $\Gamma(1) = 1$ であり, (1) より

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2 \cdot \frac{1}{2} - 1} \theta \sin^{2 \cdot \frac{1}{2} - 1} \theta d\theta = 2 \times \frac{\pi}{2} \quad \therefore \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi.$$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx$ の被積分関数は正だから, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ である.

(4) (1)(2) 及び三角関数の倍角の公式より

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} &= B(x, x) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2x-1} \theta d\theta = 2^{1-2x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(2\theta) 2d\theta \\ &=_{\eta = 2\theta} 2^{1-2x} \int_0^\pi \sin^{2x-1} \eta d\eta = 2^{1-2x} \int_0^\pi \cos^{2x-1} \left(\eta - \frac{\pi}{2}\right) d\eta \quad (\cos(\eta - \frac{\pi}{2}) = \sin \eta \text{ より}) \\ &=_{\tau = \eta - \frac{\pi}{2}} 2^{2-2x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1} \tau d\tau = 2^{1-2x} B\left(x, \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x} \frac{\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

*1 ※ 本書に於いて Beta 関数は $\beta(m, n)$ と表記されているが, 大文字の方が一般的だと思われるので, ここでは $B(m, n)$ と記した.

※ 本書では (2)(3)(4) = (1)(2)(3) だが, 重要なので (1) を追加した.

被積分関数が正より $\Gamma(x) > 0$ である事, 及び (3) より

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} = 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\frac{1}{2})} \quad \therefore \Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\Gamma(2x)$$

□

6.

(1) 次の式を例題 5.4.8 の方法を用いて示せ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

(2) Beta 関数を用いて $\int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos^4 \theta d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{4}{2}, \frac{5}{2}\right)$ を示し, この値を求めよ.

【解答】(1) は例題 5.4.8 と全く同じなので省略. 尚, e^{-x^2} は偶関数だから, $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を既知とすれば, 等式は次のように示される:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

(2) 5. (1) の証明中に於いて一般に

$$B(m, n) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta d\theta \quad (m, n > 0)$$

となる事が示されている. また $y = 1 - x$ と置換する事で $B(m, n) = B(n, m)$ となる事が分かる. これより

$$B\left(\frac{4}{2}, \frac{5}{2}\right) = B\left(\frac{5}{2}, 2\right) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \sin^3 \theta d\theta$$

が成立. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ より $\frac{1}{2}B\left(\frac{4}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2)\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{9}{2})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{2}{35}$

□