第 5 章 重積分

以下，次の記号を用いる:

- $\mathbf{abs}(x) = |x|$ は実数 x の絶対値を表す.
- 2 変数関数の組 $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ に対する Jacobi 行列，Jacobi 行列式 (= Jacobian) をそれぞれ

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

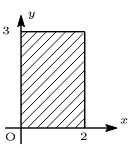
により表す (後者は本書に於いて $J(x, y)$ と表される).

§5.1 (p.115)

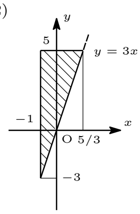
1. 次の領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(1) $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3\}$
(2) $D = \{(x, y) \mid -1 \le x,\ 3x \le y \le 5\}$
(3) $D = \{(x, y) \mid 2 \le x + y \le 3,\ 3 \le 2x - y \le 5\}$
(4) $D = \{(x, y) \mid x^2 \le y \le -3x\}$.
(5) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4,\ xy \le 1\}$.
(6) $D = \{(x, y) \mid \sqrt{x} \le y \le 2\}$.
(7) $D = \{(x, y) \mid |x - 1| + y \le 2,\ 0 \le y\}$.
(8) $D = \{(x, y) \mid |x - 1| + |y - 1| \le 3\}$.

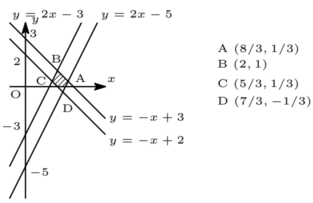
(1)



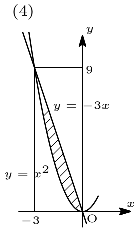
(2)



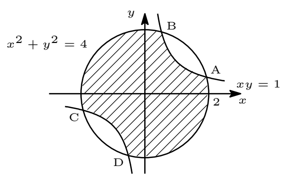
(3)



(4)

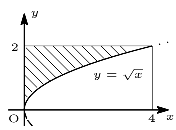


(5)

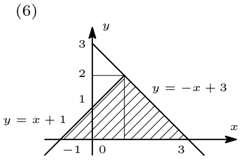


A $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$ B $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$
C $\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$ D $\left(-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$

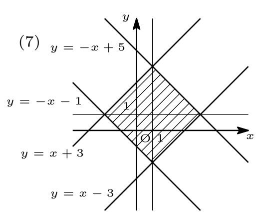
(6)



(6)



(7)



2. 次の 2 変数関数と領域 D での 2 重積分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を，立体図形を用いて求めよ．

(1) $f(x,y)=2, \qquad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$

(2) $f(x,y)=3, \qquad D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$

(3) $f(x,y)=x+y, \qquad D=\{(x,y)\mid 1\le x+y\le 2,\ 0\le x,\ 0\le y\}$

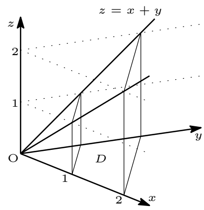
(4) $f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \qquad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2\} \qquad$ (ただし $a>0$).

(5) $f(x,y)=1-\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}, \qquad D=\{(x,y)\mid 0\le x\le \sqrt{4-y^2},\ 0\le y\le 2\}$.

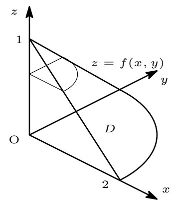
【解答】 体積を求めたい立体図形を V と記す．

(1) V は半径 1 の円板を底面とする高さ 2 の円柱だから，その体積は 2π.
(2) V は横 1，縦 2 の矩形を底面とする高さ 3 の直方体だから，その体積は 6.
(3) V は 1 辺の長さが 2 の正方形を底辺とする高さ 2 の四角錐より．
1 辺の長さが 1 の正方形を底辺とする高さ 1 の四角錐を除いてできる図形だから，その体積は $7/3$.
(4) V は半径が a の半球体だから，その体積は $2\pi a^3/3$.
(5) V は半径が 2 の円を底面とする高さ 1 の直円錐を 4 等分したものだから，その体積は $\pi/3$.

(3)



(5)



□

3. 次の領域を $D=\{(x,y)\mid f(y)\le x\le g(y),\ a\le y\le b\}$ の形で表せ．

(1) $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,\ 0\le y\le x\}$

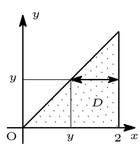
(2) $D=\{(x,y)\mid 2x^2\le y\le \sqrt{x}\}$

【解答】 (1) $D=\{(x,y)\mid y\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\}$

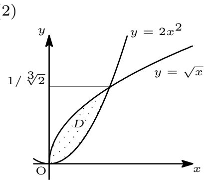
(2) $x\ge 0$ のとき，$y=2x^2 \ \Leftrightarrow\ x=\sqrt{y/2}$, $y=\sqrt{x}\ \Leftrightarrow\ x=y^2$. また $y^2=\sqrt{y/2}\ \Rightarrow\ y=1/\sqrt[3]{2}$ だから

$$D=\{(x,y)\mid y^2\le x\le \sqrt{y/2},\ 0\le y\le 1/\sqrt[3]{2}\}$$

(1)



(2)



□