

§ 4.4 (p.104)

1. 次の2変数関数 $f(x, y)$ の2次導関数 $f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y)$ および $f_{yy}(x, y)$ を求めよ.

$$(1) f(x, y) = x^4 - 3x^2y + 4xy^2 - y^4 \qquad (2) f(x, y) = \frac{x+y}{x^3+xy^2-2y^3}$$

$$(3) f(x, y) = (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}} \qquad (4) f(x, y) = e^{\frac{y}{x}} \qquad (5) f(x, y) = \log |\sin(x^2+y)|$$

【解答】 (1) $f_x(x, y) = 4x^3 - 6xy + 4y^2, f_y(x, y) = -3x^2 + 8xy - 4y^3$ より

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2 - 6y, \quad f_{xy}(x, y) = -6x + 8y, \quad f_{yy}(x, y) = 8y - 12y^2.$$

$$(2) f_x(x, y) = \frac{(x^3+xy^2-2y^3)-(x+y)(3x^2+y^2)}{(x^3+xy^2-2y^3)^2} = \frac{-2x^3-3x^2y-3y^3}{(x^3+xy^2-2y^3)^2}, \quad f_y(x, y) = \frac{(x^3+xy^2-2y^3)-(x+y)(2xy-6y^2)}{(x^3+xy^2-2y^3)^2} = \frac{x^3-2x^2y+7xy^2+4y^3}{(x^3+xy^2-2y^3)^2} \text{ より}$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{(-6x^2-6xy)(x^3+xy^2-2y^3)-2(-2x^3-3x^2y-3y^3)(3x^2+y^2)}{(x^3+xy^2-2y^3)^3} \\ = \frac{6x^5+12x^4y-2x^3y^2+30x^2y^3+12xy^4+6y^5}{(x^3+xy^2-2y^3)^3},$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{(-3x^2-9y^2)(x^3+xy^2-2y^3)-2(-2x^3-3x^2y-3y^3)(2xy-6y^2)}{(x^3+xy^2-2y^3)^3} \\ = \frac{-3x^5+8x^4y-24x^3y^2-30x^2y^3+3xy^4-18y^5}{(x^3+xy^2-2y^3)^3},$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{(-2x^2+10xy+12y^2)(x^3+xy^2-2y^3)-(x^3-2x^2y+5xy^2+4y^3)2(2xy-6y^2)}{(x^3+xy^2-2y^3)^3} \\ = \frac{-2x^5+6x^4y+30x^3y^2-30x^2y^3+36xy^4+24y^5}{(x^3+xy^2-2y^3)^3}.$$

$$(3) f_x(x, y) = \frac{4x}{3(x^2+y^2)^{1/3}}, \quad f_y(x, y) = \frac{4y}{3(x^2+y^2)^{1/3}} \text{ より}$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{4(x^2+3y^2)}{9(x^2+y^2)^{4/3}}, \quad f_{yy}(x, y) = -\frac{8xy}{9(x^2+y^2)^{4/3}}, \quad f_{yy}(x, y) = \frac{4(3x^2+y^2)}{9(x^2+y^2)^{4/3}}.$$

$$(4) f_x(x, y) = -\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}, \quad f_y(x, y) = -\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}} \text{ より}$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{(2x+y)y}{x^4}e^{\frac{y}{x}}, \quad f_{xy}(x, y) = -\frac{x+y}{x^3}e^{\frac{y}{x}}, \quad f_{yy}(x, y) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{y}{x}}.$$

$$(5) f_x(x, y) = \frac{2x \cos(x^2+y)}{\sin(x^2+y)}, \quad f_y(x, y) = \frac{\cos(x^2+y)}{\sin(x^2+y)} \text{ より}$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\{2 \cos(x^2+y) - 4x^2 \sin(x^2+y)\} \sin(x^2+y) - 2x \cos(x^2+y) \cdot 2x \cos(x^2+y)}{\sin^2(x^2+y)} = \frac{\sin(2(x^2+y)) - 4x^2}{\sin^2(x^2+y)},$$

$$f_{yy}(x, y) = -\frac{2x}{\sin^2(x^2+y)}, \quad f_{yy}(x, y) = -\frac{1}{\sin^2(x^2+y)}.$$

3. 2変数関数 $f(x, y)$ と $x(r, \theta) = r \cos \theta, y(r, \theta) = r \sin \theta$ の合成関数 $z(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$, および Laplacian (ラプラシアン) $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ について,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r}$$

が成立することを示せ.

【解答】 定理 4.3.7 より $z_r = z_x \cos \theta + z_y \sin \theta, z_\theta = -z_x r \sin \theta + z_y r \cos \theta$. 更に z を z_x, z_y に置き換えて

$$(z_x)_r = z_{xx} \cos \theta + z_{xy} \sin \theta, \quad (z_y)_r = z_{yx} \cos \theta + z_{yy} \sin \theta$$

$$(z_x)_\theta = -z_{xx} r \sin \theta + z_{xy} r \cos \theta, \quad (z_y)_\theta = -z_{yx} r \sin \theta + z_{yy} r \cos \theta$$

となる. $z_{xy} = z_{yx}$ と併せて

$$\begin{aligned} z_{rr} &= (z_x \cos \theta + z_y \sin \theta)_r = (z_x)_r \cos \theta + (z_y)_r \sin \theta = z_{xx} \cos^2 \theta + 2z_{xy} \cos \theta \sin \theta + z_{yy} \sin^2 \theta \\ z_{\theta\theta} &= (-z_x r \sin \theta + z_y r \cos \theta)_\theta = -(z_x)_\theta r \sin \theta - z_x r \cos \theta + (z_y)_\theta r \cos \theta - z_y r \sin \theta \\ &= z_{xx} r^2 \sin^2 \theta - z_{xy} r^2 \sin \theta \cos \theta - z_x r \cos \theta - z_{yx} r^2 \cos \theta \sin \theta + z_{yy} r^2 \cos^2 \theta - z_y r \sin \theta \\ \therefore z_{rr} + \frac{1}{r^2} z_{\theta\theta} + \frac{1}{r} z_r &= z_{xx} \cos^2 \theta + 2z_{xy} \cos \theta \sin \theta + z_{yy} \sin^2 \theta \\ &\quad + z_{xx} \sin^2 \theta - z_{xy} \sin \theta \cos \theta - \frac{z_x}{r} \cos \theta - z_{yx} \cos \theta \sin \theta + z_{yy} \cos^2 \theta - \frac{z_y}{r} \sin \theta \\ &\quad + \frac{z_x}{r} \cos \theta + \frac{z_y}{r} \sin \theta \\ &= z_{xx} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + z_{yy} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = z_{xx} + z_{yy} \end{aligned}$$

□

3. 2変数関数 $f(x, y) = \sin(x + y)$ と $x(t) = 2t - 1$, $y(t) = 3t + 1$ の合成関数を $z(t) = f(2t - 1, 3t + 1)$ とするとき, $z(t)$ の n 次導関数 $z^{(n)}(t)$ を 2変数関数の偏微分を用いて求めよ.

【解答】 $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ などと置く. 定理 4.3.2 より

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y} = 2\partial_x + 3\partial_y$$

$$\therefore \frac{d^n z}{dt^n} = (2\partial_x + 3\partial_y)^n f(x, y)|_{(x,y)=(2t-1,3t+1)} = \sum_{k=0}^n {}_n C_k 2^k 3^{n-k} \partial_x^k \partial_y^{n-k} f(x, y)|_{(x,y)=(2t-1,3t+1)}.$$

次に a を定数とし $\theta = x + y + a$ と置く. このとき定理 4.3.5 より

$$\partial_x (\sin(x + y + a)) = \frac{d}{d\theta} (\sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \cdot 1 = \sin \left(x + y + a + \frac{\pi}{2} \right)$$

同様に $\partial_y (\sin(x + y + a)) = \sin \left(x + y + a + \frac{\pi}{2} \right)$ となる事がわかる. これより

$$\begin{aligned} \partial_x^k \partial_y^{n-k} (\sin(x + y)) &= \partial_x^k \partial_y^{n-k-1} \sin \left(x + y + \frac{\pi}{2} \right) = \partial_x^k \partial_y^{n-k-2} \sin \left(x + y + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \cdots = \sin \left(x + y + \frac{n\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

となるから 2 項定理 $(2 + 3)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k 2^k 3^{n-k}$ と併せて

$$\frac{d^n z}{dt^n} = \sum_{k=0}^n {}_n C_k 2^k 3^{n-k} \sin \left(x + y + \frac{n\pi}{2} \right) |_{(x,y)=(2t-1,3t+1)} = 5^n \sin \left(5t + \frac{n\pi}{2} \right)$$

となる.

4. 次の 2 変数関数 $f(x, y)$ の Maclaurin 展開を 1 変数関数の Maclaurin 展開を用いて求めよ.

$$(1) f(x, y) = \frac{1}{1 + 2x + y^2}$$

$$(2) f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$(3) f(x, y) = x e^{x+y}$$

$$(4) f(x, y) = \log \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

$$(5) f(x, y) = \sin(x + y)$$

$$(6) f(x, y) = xy \sin(x^2 + y^2)$$

【解答】 1 変数関数の Taylor 展開 (p.40 公式 2.5.11) を利用するときは, 収束半径 (=代入できる変数の範囲) に注意せよ (特に (1)(2)(4)).

(1) $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$ より $f(x, y) = 1 - (2x + y^2) + (2x + y^2)^2 - (2x + y^2)^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \{-(2x + y^2)\}^k$ (ただし $|2x + y^2| < 1$ のときに収束).

(2) 一般 2 項定理 $(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!} t^k$ ($|t| < 1$) より

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-(k-1))}{k!} (-1)^k (x^2+y^2)^k \quad (x^2+y^2 < 1)$$

(3) 任意の t に対し $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ だから $xe^{x+y} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$.

(4) $\log(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$ ($|t| < 1$) だから

$$\log \sqrt{1+x^2+y^2} = \frac{1}{2} \log(1+x^2+y^2) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x^2+y^2)^n}{n} \quad (x^2+y^2 < 1).$$

(5) $\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$ だから $\sin(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+y)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

(6) $\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$ だから $xy \sin(x^2+y^2) = xy \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2+y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

5. 次の 2 変数関数 $f(x, y)$ の Maclaurin 展開を 3 次の項まで求めよ.

(1) $f(x, y) = \frac{xy}{x+y+xy+1}$

(2) $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$

(3) $f(x, y) = e^{x+y} \sin(x+y)$

(4) $f(x, y) = xy \cos(x^2+y^2)$

(5) $f(x, y) = \tan^{-1}(x+y)$

(6) $f(x, y) = \log(1+x^2+xy+y^2)$

【解答】 x, y の 3 次の無限小 (=4 次以降の式) を $o(3)$ と記す事にする.

(1) $|x+y+xy| < 1$ とする. xy が 2 次である事に注意すれば

$$f(x, y) = xy \left\{ 1 - (x+y+xy) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (x+y+xy)^n \right\} = xy - x^2y - xy^2 + o(3)$$

(2) $x^2+y^2 < 1$ とすると

$$f(x, y) = 1 - (x^2+y^2) + (x^2+y^2)^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n (x^2+y^2)^n = 1 - x^2 - y^2 + o(3)$$

(3) $f(x, y) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x+y)^m}{m!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+y)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = (x+y) + (x+y)^2 + \frac{(x+y)^3}{3} + o(3)$

(4) $f(x, y) = xy \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+y)^{2n}}{(2n)!} \right) = xy \left(1 - \frac{(x^2+y^2)^2}{2!} + \frac{(x^2+y^2)^4}{4!} + \dots \right) + o(3) = xy$

(5) $\tan^{-1} t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ ($|t| < 1$) より $f(x, y) = (x+y) - \frac{(x+y)^3}{3} + o(3)$

(6) $\log(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$ ($|t| < 1$) より $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + o(3)$

6. (1) 1 変数関数 $f(u)$ と $g(v)$ の和である 2 変数関数 $f(u) + g(v)$ と $u(x, y) = x + cy, v(x, y) = x - cy$ の合成関数を $z(x, y) = f(x + cy) + g(x - cy)$ とすると, $z(x, y)$ は波動方程式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を満たすことを示せ.

(2) 2 変数関数 $F(x, y)$ と $u(x, y) = x + cy, v(x, y) = x - cy$ の合成関数を $G(u, v) = F\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right)$ とする.

(i) $F(x, y)$ が波動方程式 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ を満たすとすると, $\frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v} = 0$ が成立することを示せ.

(ii) $f(u) = \int \frac{\partial G}{\partial u} du$ と置くと $G(u, v) = f(u) + g(v)$ となる事を示せ.

【解答】 (1) 定理 4.3.7, 及び $u_x = v_x = 1, u_x = c, v_x = -c$ より

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x = z_u \cdot 1 + z_v \cdot 1 = z_u + z_v, \quad z_y = z_u u_y + z_v v_y = z_u \cdot c + z_v \cdot (-c) = c(z_u - z_v)$$

$$z_{xx} = (z_u)_x + (z_v)_x = z_{uu} u_x + z_{uv} v_x + z_{vu} u_x + z_{vv} v_x = z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv}$$

$$z_{yy} = c(z_u)_y - c(z_v)_y = c(z_{uu} u_y + z_{uv} v_y) - c(z_{vu} u_y + z_{vv} v_y) = c^2(z_{uu} - 2z_{uv} + z_{vv})$$

z の定義より $z_{uv} = 0$ だから

$$z_{xx} - \frac{1}{c^2} z_{yy} = z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv} - (z_{uu} - 2z_{uv} + z_{vv}) = 4z_{uv} = 0 \quad \therefore z_{xx} = \frac{1}{c^2} z_{yy}$$

(2) (i) $x_u = x_v = 1/2, y_u = 1/2c, y_v = -1/2c$ より

$$\begin{aligned} G_{uv} &= (F_{xx} u_x + F_{yy} y_u)_v = \frac{1}{2c} (cF_x + F_y)_v = \frac{1}{2c} \{c(F_{xx} x_v + F_{xy} y_v) + (F_{yx} x_v + F_{yy} y_v)\} \\ &= \frac{1}{2c} \left\{ \left(\frac{c}{2} F_{xx} - \frac{1}{2} F_{xy} \right) + \left(\frac{1}{2} F_{yx} - \frac{1}{2c} F_{yy} \right) \right\} = \frac{1}{4} \left(F_{xx} - \frac{1}{c^2} F_{yy} \right) = 0 \end{aligned}$$

(ii) $g = G - f$ と置くと $g_u = G_u - f_u = G_u - G_u = 0$ より g は変数 v のみの関数となる.

7. 次の式で定まる陰関数が存在するか判定し, 存在する場合は陰関数の導関数を求めよ.

(1) $x^2 + xy - y^2 + 2 = 0$ (2) $x^2 - y^2 + x^2 y^2 = 0$ (3) $5x^2 + 8y^2 - 5 = 0$

(4) $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ (5) $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 1$ (6) $e^{x+y} = x^2 + y^2$

(7) $\log(x^2 + y^2) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

【解答】 $f = 0$ で定義される陰関数を $y = \varphi(x)$ と置く.

(1) $f = x^2 + xy - y^2 + 2$ と置く. $f_x = 2x - y, f_y = x - 2y$. $x = 2y$ のとき, $f = 4y^2 + 2y^2 - y^2 + 2 = 5y^2 + 2 > 0$ だから, 曲線 $f = 0$ 上で f_y は決して 0 にならない. よって至る所で陰関数を持ち, $\varphi' = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{2x-y}{x-2y}$ となる.

(2) $f = x^2 - y^2 + x^2 y^2$ と置く. $f_x = 2x + 2xy^2 = 2x(1 + y^2), f_y = -2y + 2x^2 y = 2y(x^2 - 1)$. $x^2 = 1$ のとき, $f = 1 - y^2 + y^2 = 1 > 0$ だから, 曲線 $f = 0$ 上で f_y は決して 0 にならない. よって至る所で陰関数を持ち, $\varphi' = -\frac{x(y^2 + 1)}{y(x^2 - 1)}$ となる.

(3) $f = 5x^2 + 8y^2 - 5$ と置く. $f_x = 10x, f_y = 16y$. $(x, y) = (\pm 1, 0)$ を除き, 曲線 $f = 0$ 上で f_y は決して 0 にならず, よって陰関数が定まる. また, この陰関数の導関数は $\varphi' = -\frac{5x}{8y}$ となる.

(4) $f = x^3 - 3xy + y^3$ と置く. $f_x = 3x^2 - 3y, f_y = -3x + 3y^2$. $(x, y) = (3^{2/3}, 3^{1/3})$ を除き, 曲線 $f = 0$ 上で f_y は決して 0 にならず, よって陰関数が定まる. また, この陰関数の導関数は $\varphi' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$ となる.

(5) $f = x^{1/3} + y^{1/3} - 1$ と置く. $f_x = \frac{1}{3x^{2/3}}, f_y = \frac{1}{3y^{2/3}}$. $(x, y) = (1, 0), (0, 1)$ を除き, 曲線 $f = 0$ 上で f_y は決して 0 にならず, よって陰関数が定まる. また, この陰関数の導関数は $\varphi' = -\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}$ となる.

(6) $f = e^{x+y} - x^2 - y^2$ と置く. $f_x = e^{x+y} - 2x, f_y = e^{x+y} - 2y$. $f = 0$ かつ $e^{x+y} = 2y$ となる点 (x, y) を除き陰関数が定まる. また, この陰関数の導関数は $\varphi' = -\frac{e^{x+y} - 2x}{e^{x+y} - 2y}$ となる.

(7) $f = \log(x^2 + y^2) - \tan^{-1} \frac{y}{x}$ と置く. $f_x = \frac{2x+y}{x^2+y^2}, f_y = \frac{2y-x}{x^2+y^2}$. $\log(5y^2) = \tan^{-1} \frac{1}{2}$ となる点 (x, y) を除き陰関数が定まる. また, この陰関数の導関数は $\varphi' = -\frac{2x+y}{2y-x}$ となる.