§ **4.3** (p.95)

1. 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$ および $f_y(x,y)$ を求めよ.

(1) $f(x,y)=(x^3-2xy+y^3)^4$ (2) $f(x,y)=\dfrac{(x^2+y)^2}{(x+y)^3}$ (3) $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$

(4) $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ (5) $f(x,y)=e^{x^2+y+1}$ (6) $f(x,y)=\log\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

(7) $f(x,y)=\sin(x^2+xy+y^2)$ (8) $f(x,y)=\sin^2(x+y)\cos^3(x^2+y^2)$

(9) $f(x,y)=\sin^{-1}\dfrac{y}{x}$ (10) $f(x,y)=\tan^{-1}\sqrt{x^2+y^2}$

(11) $f(x,y)=\cos\log(x^2+y^2+1)$

【解答】 (1) $f_x(x,y)=4(x^3-2xy+y^3)^3(3x^2-2y)$, $f_y(x,y)=4(x^3-2xy+y^3)^3(-2x+3y^2)$

(2) $f_x(x,y)=\dfrac{2(x^2+y)\cdot 2x\cdot(x+y)^3-(x^2+y)^2\cdot 3(x+y)^2}{(x+y)^6}=\dfrac{(x^2+y)(x^2+4xy-3y)}{(x+y)^4}$

$f_y(x,y)=\dfrac{2(x^2+y)\cdot(x+y)^3-(x^2+y)^2\cdot 3(x+y)^2}{(x+y)^6}=-\dfrac{(x^2+y)\cdot(3x^2-2x+y)}{(x+y)^4}$

(3) $f_x(x,y)=\dfrac{2}{3}\dfrac{2x}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}=\dfrac{4x}{3\sqrt[3]{x^2+y^2}}$. $f(x,y)$ は x,y に関して対称だから, y と x との役割を入れ替えれば $f_y(x,y)=\dfrac{4y}{3\sqrt[3]{x^2+y^2}}$

(4) $f_x(x,y)=\dfrac{y\sqrt{x^2+y^2+1}-xy\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+1}}}{x^2+y^2+1}=\dfrac{y^3+y}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}$. $f(x,y)$ は x,y に関して対称だから, y と x との役割を入れ替えれば $f_y(x,y)=\dfrac{x^3+x}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}$

(5) $f_x(x,y)=e^{x^2+y+1}(x^2+y+1)_x=2xe^{x^2+y+1}$. $f_y(x,y)=e^{x^2+y+1}$.

(6) $\log\frac{x^2}{x^2+y^2}=2\log x-\log(x^2+y^2)$ より $f_x(x,y)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}=\dfrac{2y^2}{x(x^2+y^2)}$. $f_y(x,y)=-\dfrac{2y}{x^2+y^2}$.

(7) $f_x(x,y)=(x^2+xy+y^2)_x\cos(x^2+xy+y^2)=(2x+y)\cos(x^2+xy+y^2)$, $f_y(x,y)=(x+2y)\cos(x^2+xy+y^2)$

(8)
$$\begin{aligned}f_x(x,y)&=2\sin(x+y)\cos(x+y)\cos^3(x^2+y^2)+\sin^2(x+y)\cdot 3\cos^2(x^2+y^2)(-\sin(x^2+y^2))\cdot 2x\\&=2\sin(x+y)\cos^2(x^2+y^2)\{\cos(x+y)\cos(x^2+y^2)-3x\sin(x+y)\sin(x^2+y^2)\}\\f_y(x,y)&=2\sin(x+y)\cos^2(x^2+y^2)\{\cos(x+y)\cos(x^2+y^2)-3y\sin(x+y)\sin(x^2+y^2)\}\end{aligned}$$

(9) $f_x(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=\dfrac{y}{|x|\sqrt{x^2-y^2}}$ $f_y(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{|x|}{x\sqrt{x^2-y^2}}$

(10) $f_x(x,y)=\dfrac{1}{1+(\sqrt{x^2+y^2})^2}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y(x,y)=\dfrac{y}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$.

(11) $f_x(x,y)=-\sin\log(x^2+y^2+1)\cdot\dfrac{1}{x^2+y^2+1}\cdot 2x=-\dfrac{2x\sin\log(x^2+y^2+1)}{x^2+y^2+1}$,

$f_y(x,y)=-\dfrac{2y\sin\log(x^2+y^2+1)}{x^2+y^2+1}$. □

2. 次の関数の合成関数 $z(t)=f(x(t),y(t))$ の導関数 $z'(t)$ を, 2 変数関数の合成関数の公式 (定理 4.3.2) を用いて求めよ. また, $f(x,y)$ に $x(t),y(t)$ を代入し, 1 変数関数としての微分を行い $z'(t)$ を直接計算し, 両者が一致していることを確かめよ.

(1) $f(x,y)=x^2+y^2+1$ $x(t)=2\cos t$, $y(t)=3\sin t$

(2) $f(x,y)=\sin xy$ $x(t)=e^{2t}$, $y(t)=3e^{-t}$

【解答】 (1) 定理 4.3.2 より $z' = f_x x_t + f_y y_t = (2x)(-2\sin t) + (2y)(3\cos t) = (4\cos t)(-2\sin t) + (6\sin t)(3\cos t) = 10\sin t\cos t$. 一方，代入すると $z(t) = 4\cos^2 t + 9\sin^2 t + 1$ だから，$z' = 8\cos t(-\sin t) + 18\sin t\cos t = 10\sin t\cos t$ となり，定理 4.3.2 を利用した結果と一致する．

(2) 定理 4.3.2 より $z' = f_x x_t + f_y y_t = (y\cos xy)(2e^{2t}) + (x\cos xy)(-3e^{-t}) = 2xy\cos xy - xy\cos xy = 3e^t\cos(3e^t)$. 一方，代入すると $z(t) = \sin 3e^t$ だから，$z' = (3e^t)\cos(3e^t)$ となり，定理 4.3.2 を利用した結果と一致する． □

3. 次の関数の合成関数 $z(x,y) = g(t(x,y))$ の偏導関数を，2 変数関数の合成関数の公式 (定理 4.3.5) を用いて求めよ．また，$g(t)$ に $t(x,y)$ を代入し，2 変数関数として偏微分 $z_x(x,y)$, $z_y(x,y)$ を計算して，両者が一致していることを確かめよ．

(1) $g(t) = e^{t^2}$ $\qquad t(x,y) = \sin xy$

(2) $g(t) = t^2 + t + 1$ $\qquad t(x,y) = (x+y)^3$

【解答】 (1) 定理 4.3.5 より

$$z_x = g_t t_x = 2te^{t^2}(y\cos xy) = 2y\sin xy\cos xy e^{\sin^2 xy}, \qquad z_y = g_t t_y = 2te^{t^2}(x\cos xy) = 2x\sin xy\cos xy e^{\sin^2 xy}.$$

一方，代入すると $z(x,y) = e^{\sin^2 xy}$ だから，$z_x = 2y\sin xy\cos xy e^{\sin^2 xy}$，$z_y = 2x\sin xy\cos xy e^{\sin^2 xy}$ となり，定理 4.3.5 を利用した結果と一致する．

(2) 定理 4.3.5 より $z_x = g_t t_x = (2t+1)(3(x+y)^2) = 6(x+y)^5 + 3(x+y)^2$. $z_y = g_t t_y = 6(x+y)^5 + 3(x+y)^2$. 一方，代入すると $z(x,y) = (x+y)^6 + (x+y)^3 + 1$ だから，$z_x = z_y = 6(x+y)^5 + 3(x+y)^2$ となり，定理 4.3.5 を利用した結果と一致する． □

4. 次の関数の合成関数 $z(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$ の偏導関数を，2 変数関数の合成関数の公式 (定理 4.3.7) を用いて求めよ．また，$f(x,y)$ に $x(s,t), y(s,t)$ を代入し，2 変数関数として偏微分 $z_s(s,t)$, $z_t(s,t)$ を計算して，両者が一致していることを確かめよ．

(1) $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$ $\qquad x(s,t) = e^{s+t}$, $y(s,t) = e^{s-t}$

(2) $f(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad x(s,t) = \dfrac{1}{s+t}$, $y(s,t) = \dfrac{1}{s-t}$

【解答】 (1) 定理 4.3.7 より $z_s = f_x x_s + f_y y_s = 2(x+y)e^{s+t} + 2(x-y)e^{s-t} = 2z$. $z_t = f_x x_t + f_y y_t = 2(x+y)e^{s+t} - 2(x-y)e^{s-t} = 2(x^2+y^2)$. 一方，代入すると $z(s,t) = e^{2s+2t} + 2e^{2s} - e^{2s-2t}$ だから，$z_s = 2e^{2s+2t} + 4e^{2s} - 2e^{2s-2t} = 2z$, $z_t = 2e^{2s+2t} + 2e^{2s-2t} = 2(x^2+y^2)$ となり，定理 4.3.7 を利用した結果と一致する．

(2) 定理 4.3.7 より

$$\begin{aligned}
z_s &= f_x x_s + f_y y_s = \tfrac{x\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\tfrac{1}{(s+t)^2}\right) + \tfrac{y\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\tfrac{1}{(s-t)^2}\right) = -\tfrac{(x^3+y^3)\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\
z_s &= f_x x_s + f_y y_s = \tfrac{x\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\tfrac{1}{(s+t)^2}\right) + \tfrac{y\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(+\tfrac{1}{(s-t)^2}\right) = -\tfrac{(x^3-y^3)\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}$$

一方，代入すると $x^2 + y^2 = \frac{(s-t)^2+(s+t)^2}{(s+t)^2(s-t)^2} = \frac{2(s^2+t^2)}{(s^2-t^2)^2}$， $\quad z(s,t) = \sin\sqrt{\frac{2(s^2+t^2)}{(s^2-t^2)^2}}$ だから，

$$\begin{aligned}
z_s &= \cos\sqrt{\tfrac{2(s^2+t^2)}{(s^2-t^2)^2}}\,\tfrac{1}{2\sqrt{\frac{2(s^2+t^2)}{(s^2-t^2)^2}}}\,\tfrac{4s(s^2-t^2)^2-2(s^2+t^2)\cdot 2(s^2-t^2)\cdot 2s}{(s^2-t^2)^4} = \tfrac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\tfrac{-2s(s^2+3t^2)}{(s^2-t^2)^3} \\
z_t &= \cos\sqrt{\tfrac{2(s^2+t^2)}{(s^2-t^2)^2}}\,\tfrac{1}{2\sqrt{\frac{2(s^2+t^2)}{(s^2-t^2)^2}}}\,\tfrac{4t(s^2-t^2)^2-2(s^2+t^2)\cdot 2(s^2-t^2)\cdot(-2t)}{(s^2-t^2)^4} = \tfrac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\tfrac{2t(3s^2+t^2)}{(s^2-t^2)^3} \\
x^3 + y^3 &= \tfrac{1}{(s+t)^3} + \tfrac{1}{(s-t)^3} = \tfrac{2s(s^2+3t^2)}{(s^2-t^2)^3}, \qquad x^3 - y^3 = -\tfrac{2t(3s^2+t^2)}{(s^2-t^2)^3}
\end{aligned}$$

従って定理 4.3.7 を利用した結果と一致する． □

5. (1) 1 変数関数 $f(t)$ と $t(x,y)=ax+by$ の合成関数 $z(x,y)=f(ax+by)$ について，次の等式が成立することを示せ.

$$b\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial y}$$

(2) 2 変数関数 $f(x,y)$ と $x(r,\theta)=r\cos\theta$, $y(r,\theta)=r\sin\theta$ の合成関数 $z(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ について，次の等式が成立することを示せ.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

【解答】 (1) 定理 4.3.5 より $z_x=z_tt_x=z_t(ax+by)_x=az_t$，$z_y=z_tt_y=bz_t$ だから，$bz_x=atz_t=az_y$ となる.

(2) 定理 4.3.7 より $z_r=z_xx_r+z_yy_r=\cos\theta z_x+\sin\theta z_y$，$z_\theta=z_xx_\theta+z_yy_\theta=-yz_x+xz_y$ だから

$$\begin{aligned}
z_r^2+\frac{1}{r^2}z_\theta^2&=(\cos\theta z_x+\sin\theta z_y)^2+(-\sin\theta z_x+\cos\theta z_y)^2\\
&=\cos^2\theta z_x^2+2\cos\theta\sin\theta z_xz_y+\sin^2\theta z_y^2+\sin^2\theta z_x^2-2\sin\theta\cos\theta z_xz_y+\cos^2\theta z_y^2\\
&=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)z_x^2+(\sin^2\theta+\cos^2\theta)z_y^2
\end{aligned}$$

従って $z_r^2+\frac{1}{r^2}z_\theta^2=z_x^2+z_y^2$ となる. □