演習問題 **4.2** の解答 (p.91)

1. 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$ および $f_y(x,y)$ を求めよ．

(1) $f(x,y)=x^3+3x^2y-5xy^2+2y^3$ (2) $f(x,y)=(x^2+xy+1)(x^3+xy^2+y^3)$

(3) $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ (4) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ (5) $f(x,y)=\dfrac{xy+3}{x^2+y^2+1}$

(6) $f(x,y)=e^x\sin y$

【解答】 (1) $f_x(x,y)=(x^3)_x+3y(x^2)_x-5y^2(x)_x+2y^3(1)_x=3x^2+3y\cdot 2x-5y^2\cdot 1+2y^3\cdot 0=\underline{3x^2+6xy-5y^2}$
$f_y(x,y)=x^3(1)_y+3x^2(y)_y-5x(y^2)_y+2(y^3)_y=x^3\cdot 0+3x^2\cdot 1-5x\cdot 2y+2\cdot 3y^2=\underline{3x^2-10xy+6y^2}$

(2) $f_x(x,y)=(2x+y)(x^3+xy^2+y^3)+(x^2+xy+1)(3x^2+y^2)$
$f_y(x,y)=x(x^3+xy^2+y^3)+(x^2+xy+1)(2xy+3y^2)$

(3) $f_x(x,y)=1/y,\quad f_y(x,y)=-x/y^2$

(4) $f_x(x,y)=\{1\cdot(x+y)-(x-y)\cdot 1\}/(x+y)=\underline{2y/(x+y)^2},\quad f_y(x,y)=\{(-1)\cdot(x+y)-(x-y)\cdot 1\}/(x+y)=\underline{-2x/(x+y)^2}$

(5) $f_x(x,y)=\{y\cdot(x^2+y^2+1)-(xy+3)\cdot 2x\}/(x^2+y^2+1)=\underline{-(x^2y+6x-y^3-y)/(x^2+y^2+1)^2}$.
$f(x,y)$ は x,y に関し対称だから $f_x(x,y)=\underline{(x^3-xy^2+x-6y)/(x^2+y^2+1)^2}$.

(6) $f_x(x,y)=e^x\sin y,\quad f_y(x,y)=e^x\cos y.$ □

2. 偏微分係数の定義にしたがって，$f(x,y)=x^2y$ の偏微分係数 $f_x(a,b)$ および $f_y(a,b)$ を求めよ．

【解答】 $f_x(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2b-a^2b}{h}=\lim_{h\to 0}(2ab+hb)=2ab\qquad f_y(a,b)=\lim_{k\to 0}\frac{a^2(b+k)-a^2b}{k}=\lim_{h\to 0}a^2=a^2$ □

3. 全微分の定義にしたがって，$f(x,y)=x+y^2$ が全微分可能であることを示せ．

【解答】 $f_x(x,y)=1$，$f_y(x,y)=2y$ に注意して，

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)-(1\cdot h+2yk)}{\sqrt{h^2+k^2}}&=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{x+h+(y+k)^2-x-y^2-h-2yk}{\sqrt{h^2+k^2}}\\&=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\\&=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\sin\theta}{r}=0\qquad(h=r\cos\theta,k=r\sin\theta\text{と置く})\end{aligned}$$

従って $f(x,y)$ は至る所で全微分可能である． □

4. 次の式で定義される 2 変数関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2y}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

の原点における偏微分可能性を調べよ．

【解答】 $\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{(0+h)^2+0^2}-0}{h}=0$ より $f(x,y)$ は原点に於いて x に関し偏微分可能であり，$f_x(0,0)=0$ となる．

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{k}{0^2+(0+k)^2}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{1}{k^2}=\infty$$

より $f(x,y)$ は原点に於いて y に関し偏微分不可能である． □

5. 次の曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $(1, 2, f(1, 2))$ での接平面および xy-平面に平行な接線を求めよ．

(1) $f(x, y) = xy$　(2) $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - y^3$　(3) $f(x, y) = (x + y)e^{x-y}$

(4) $f(x, y) = \cos x^2 y\pi$　(5) $f(x, y) = \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}(x + y)}{x + y}$

(6) $f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2)$　(7) $f(x, y) = (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 2)^2$

【解答】 $(a, b, f(a, b))$ に於ける曲面 $z = f(x, y)$ の接平面の方程式は $z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$ により与えられる．また xz 平面に平行な接線とは，接平面と平面 $y = b$ との交線 $y = b$, $z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a)$ の事である．

(1) $f_x(x, y) = y$, $f_y(x, y) = x$ より接平面の方程式は $z - 2 = 2(x - 1) + (y - 2)$, $z = 2x + y - 2$. また xz 平面に平行な接線は $y = 2$, $z = 2x$ である．

(2) $f_x(x, y) = 3x^2 + 2y^2$, $f_y(x, y) = 4xy - 3y^2$ より接平面の方程式は $z - (1 + 8 - 8) = (3 + 8)(x - 1) + (8 - 12)(y - 2)$, $z = 11x - 4y - 2$. また xz 平面に平行な接線は $y = 2$, $z = 11x - 10$ である．

(3) $f_x(x, y) = (x + y + 1)e^{x-y}$, $f_y(x, y) = (1 - x - y)e^{x-y}$ より接平面の方程式は $z = 4e^{-1}x - 2e^{-2}y + 3e^{-1}$. また xz 平面に平行な接線は $y = 2$, $z = 4e^{-1}x - e^{-2}$ である．

(4) $f_x(x, y) = -2\pi xy \sin x^2 y\pi$, $f_y(x, y) = -\pi x^2 \sin x^2 y\pi$ より接平面の方程式は $z = 1$. また xz 平面に平行な接線は $y = 2$, $z = 1$ である．

(5) $f_x(x, y) = f_y(x, y) = \frac{\pi \cos(\pi/4)(x+y))}{4(x+y)} - \frac{\sin(\pi/4)(x+y)}{(x+y)^2}$ より接平面の方程式は $z - \frac{1}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{9\sqrt{2}}\left(1 + \frac{3\pi}{4}\right)(x + y - 3)$. また xz 平面に平行な接線は $y = 2$, $z = -\frac{1}{9\sqrt{2}}\left(1 + \frac{3\pi}{4}\right)x + 2\sqrt{2}/9 + \sqrt{2}\pi/24$ である．

(6) $f_x(x, y) = 2x/(1 + x^2 + y^2)$, $f_y(x, y) = 2y/(1 + x^2 + y^2)$ より接平面の方程式は $z = x/3 + 2y/3 - 5/3 + \log 6$. また xz 平面に平行な接線は $y = 2$, $z = x/3 - 1/3 + \log 6$ である．

(y) $f_x(x, y) = (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 2)/\sqrt{x}$, $f_y(x, y) == (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 2)/\sqrt{y}$ より接平面の方程式は $z = (\sqrt{2} - 1)x + ((2 - \sqrt{2})/2)y + 2 - 2\sqrt{2}$. また xz 平面に平行な接線は $y = 2$, $z = (\sqrt{2} - 1)x + 4 - 3\sqrt{2}$ である．

□