

§ 7.2 (p.170)

1. c_1, c_2, \dots 等は任意定数を表す事とする.

(1) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$.

(2) 方程式の形より一般解は $y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + c_3 e^{-x}$.

(3) $D^2 + 2D + 2 = (D + 1 - i)(D + 1 + i)$ より $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{(-1+i)x} + c_3 e^{(-1-i)x}$. または Euler の公式を適用し, $c_2 + c_3, c_2 - c_3$ を改めて c_2, c_3 と置けば $y = (c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x)e^{-x}$.

(4) $y'' + 2y' - 3y = (D + 3)(D - 1)y = 0$ より $y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$.

(5) $y''' + 3y'' + 3y' + y = (D + 1)^3 y = 0$ より $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{-x}$.

(6) $y''' - 3y'' + 2y' = D(D - 1)(D - 2)y = 0$ より $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x}$.

2. (1) 例題 7.2.1 より $\frac{1}{D^2 - D} e^{2x} = \frac{1}{2^2 - 2} e^{2x} = \frac{e^{2x}}{2}$.

(2) $\frac{1}{D(D+1)} e^{-x} = \frac{1}{D+1} \cdot \int e^{-x} dx = -\frac{1}{D+1} e^{-x} = -e^{-x} \int e^{-(-x)} e^{-x} dx = \underline{-x e^{-x}}$.

(3) $\frac{1}{(D-1)(D-2)} x e^x = \frac{1}{(D-2)} e^x \int x dx = \frac{e^{2x}}{2} \int x^2 e^{-x} dx = \underline{-\frac{x^2 + 2x + 2}{2} e^x}$.

(4) 定理 7.2.7, 例題 7.2.1 より

$$\frac{1}{D^2 + 2D - 8} e^{2x} = \frac{1}{(D+1)^2 - 9} e^{2x} = e^{-x} \frac{1}{(D-3)(D+3)} e^{3x} = \frac{e^{-x}}{6} \frac{1}{D-3} e^{3x} = \frac{e^{-x}}{6} x e^{3x} = \underline{\frac{x e^{2x}}{6}}$$

(5) 例題 7.2.1 より $\frac{1}{D(D-2)(D-3)} e^{2x} = -\frac{1}{2} \frac{1}{D-2} e^{2x} = \underline{-\frac{x}{2} e^{2x}}$.

(6) $\frac{1}{D-2} x e^{2x} = e^{2x} \int x dx = \underline{\frac{x^2}{2} e^{2x}}$.

(7) $\frac{1}{D-1} \sin x = e^x \int e^{-x} \sin x dx = \underline{-\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)}$.

(8) Euler の公式と例題 7.2.1 により

$$\begin{aligned} \frac{1}{(D-1)(D-2)} \cos 2x &= \frac{1}{2} \frac{1}{(D-1)(D-2)} (e^{2ix} + e^{-2ix}) \\ &= \frac{-1 + 3i}{40} e^{2ix} + \frac{-1 - 3i}{40} e^{-2ix} = \underline{-\frac{1}{20}(\cos 2x + 3 \sin 2x)}. \end{aligned}$$

(9) 例題 7.2.2 により

$$\frac{1}{D+1} (x^2 + x - 1) = (1 - D + D^2)(x^2 + x - 1) = \underline{x^2 - x}.$$

(10) 例題 7.2.2 により

$$\frac{1}{(D+1)(D-2)} (x^2 - x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{D+1} (1 + D/2 + (D/2)^2)(x^2 - x) = -\frac{1}{2} (1 - D + D^2)x^2 = \underline{-\frac{x^2 - 2x + 2}{2}}$$

3. c_1, c_2, \dots 等は任意定数を表す事とする.

(1) $D(D + 3)y = 0$ の一般解は $y = c_1 + c_2 e^{-3x}$ となる. また例題 7.2.1, 例題 7.2.2 より

$$\begin{aligned} \frac{1}{D(D+3)} (e^{3x} + x) &= \frac{1}{18} e^{3x} + \left(\frac{1}{3} \frac{1}{D} - \frac{1}{3} \frac{1}{D+3} \right) x \\ &= \frac{1}{18} e^{3x} + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{9} (1 - \frac{1}{3} D)x = \frac{1}{18} e^{3x} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9} + \frac{1}{27}. \end{aligned}$$

$c_1 + 1/27$ を改めて c_1 と置けば、一般解は $y = \frac{1}{18}(e^{3x} + 3x^2 - 2x) + c_1 + c_2e^{-3x}$.

(2) $(D-1)(D-2)(D+3)y = 0$ の一般解は $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{-3x}$ となる。また例題 7.2.1, 定理 7.2.5 より

$$\frac{1}{(D-1)(D-2)(D+3)}(e^x) = -\frac{1}{4} \frac{1}{D-1}e^x = -\frac{1}{4}xe^x$$

だから、一般解は $y = -\frac{1}{4}xe^x + c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{-3x}$.

(3) $(D-2)(D+3)y = 0$ の一般解は $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$ 。また例題 7.2.1 より

$$\begin{aligned} \frac{1}{(D-2)(D+3)} \cos x &= \frac{1}{2} \frac{1}{(D-2)(D+3)}(e^{ix} + e^{-ix}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-7-i}{50}e^{ix} + \frac{-7+i}{50}e^{-ix} \right) = \frac{1}{50}(\sin x - 7 \cos x) \end{aligned}$$

よって一般解は $y = \frac{1}{50}(\sin x - 7 \cos x) + c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$.

(4) $(D^3 + D^2 + D + 1)y = (D^2 + 1)(D + 1)y = 0$ の一般解は $y = c_1e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x$ 。また例題 7.2.1 より $y = \frac{1}{4}e^x$ が特殊解となる。よって一般解は $y = \frac{1}{4}e^x + c_1e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x$ 。

(5) $(D^2 - 2D - 3)y = (D-3)(D+1)y = 0$ の一般解は $y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$ 。また

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2 - 2D - 3}e^{-x} &= -\frac{1}{4}e^{-x} \int e^xe^{-x} dx = -\frac{x}{4}e^{-x}, \\ \frac{1}{D^2 - 2D - 3}x &= -\frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}D} \frac{1}{1 + D}x = -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}D\right)(1 - D)x = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{9} \end{aligned}$$

だから、一般解は $y = -\frac{x}{4}e^{-x} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} + c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$ 。

(6) $y'' - 2y' + y = 0$ の一般解は $y = (c_1 + c_2x)e^x$ 。また定理 7.2.5 より

$$\frac{1}{(D-1)^2}e^x = \frac{1}{D-1}xe^x = \frac{x^2}{2}e^x$$

だから、一般解は $y = (\frac{1}{2}x^2 + c_1 + c_2x)e^x$ 。

(7) $y''' - 5y'' + 2y' + 8y = (D+1)(D-2)(D-4)y = 0$ の一般解は $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + c_3e^{4x}$ 。例題 7.2.2 より

$$\frac{1}{(D+1)(D-2)(D-4)}(16x) = \frac{1}{8} \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}D)(1+D)(1 - \frac{1}{4}D)}(16x) = 2 \left(1 + \frac{1}{2}D\right)(1-D) \left(1 + \frac{1}{4}D\right)x = 2x - \frac{1}{2}$$

だから、一般解は $y = 2x - \frac{1}{2} + c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + c_3e^{4x}$ 。

(8) $y''' - y = (D-1)(D+1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(D+1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i)y = 0$ の一般解は $c_1e^x + e^{-x/2}(c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x)$ 。また例題 7.2.1 より $\frac{1}{7}e^{2x}$ が特殊解となるから、一般解は $y = \frac{1}{7}xe^{2x} + c_1e^x + e^{-x/2}(c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x)$ 。

4. c_1, c_2, \dots 等により任意定数を表す。

(1) $(D-2)(D+3)y = 0$ の一般解は $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$ 。例題 7.2.1 より $\frac{1}{(D-2)(D+3)}e^{3x} = \frac{1}{6}e^{3x}$ だから、一般解は $y = \frac{1}{6}e^{3x} + c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$ 。初期条件 $y(0) = 1$ より $c_1 + c_2 = \frac{5}{6}$, $y'(0) = 0$ より $2c_1 - 3c_2 = -\frac{1}{2}$ だから $c_1 = \frac{2}{5}$, $c_2 = \frac{13}{30}$ 。よって初期値問題の解は $y = \frac{1}{30}(5e^{3x} + 12e^{2x} + 13e^{-3x})$ 。

(2) $(D+1)(D-3)y = 0$ の一般解は $y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$ 。例題 7.2.1 及び定理 7.2.5 より

$$\frac{1}{(D+1)(D-3)}e^{-x} = -\frac{1}{4} \frac{1}{D+1}e^{-x} = -\frac{1}{4}xe^{-x}$$

だから、一般解は $y = -\frac{1}{4}xe^{-x} + c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$ 。初期条件 $y(0) = 0$ より $c_1 + c_2 = 0$, $y'(0) = 0$ より $-c_1 + 3c_2 = \frac{1}{4}$ だから $c_1 = -\frac{1}{16}$, $c_2 = \frac{1}{16}$ 。よって初期値問題の解は $y = -\frac{1}{16}(4xe^{-x} + e^{-x} - e^{3x})$ 。

(3) $(D+1)(D-2)y = 0$ の一般解は $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ 。例題 7.2.2 より $\frac{1}{(D+1)(D-2)}x = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ だから、一般解

は $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$. 初期条件 $y(0) = 0$ より $c_1 + c_2 = -\frac{1}{4}$, $y'(0) = 1$ より $-c_1 + 2c_2 = \frac{1}{2}$ だから $c_1 = -\frac{2}{3}$, $c_2 = \frac{5}{12}$. よって初期値問題の解は $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{2}{3}e^{-x} + \frac{5}{12}e^{2x}$.

5. c_1, c_2 を任意定数とする. t に関する微分作用素を $D_t = \frac{d}{dt}$ と記すと

$$x \frac{d}{dx} = e^t \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} = e^t \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \frac{d}{dt} = e^t \frac{1}{e^t} \frac{d}{dt} = D_t,$$

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} = x \left(\frac{d}{dx} \cdot x - 1 \right) \frac{d}{dx} = x \frac{d}{dx} \cdot x \frac{d}{dx} - x \frac{d}{dx} = D_t^2 - D_t$$

(1) $x = e^t$ とすれば $(D_t^2 - D_t)y - D_t y + y = t^2$, $(D_t^2 - 2D_t + 1)y = t^2$. $(D_t^2 - 2D_t + 1)y = 0$ の一般解は $y = (c_1 + c_2 t)e^t$. 例題 7.2.2 より

$$\frac{1}{D_t^2 - 2D_t + 1} t^2 = (1 + D_t + D_t^2)^2 t^2 = (1 + D_t + D_t^2)(t^2 + 2t + 2) = t^2 + 4t + 6$$

だから, 一般解は

$$y = t^2 + 4t + 6 + (c_1 + c_2 t)e^t = \underline{(\log x)^2 + 4 \log x + 6 + (c_1 + c_2 \log x)x}.$$

(2) $x = e^t$ とすれば $(D_t^2 - 3D_t + 2)y = e^{3t}$. $(D_t^2 - 3D_t + 2)y = 0$ の一般解は $y = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$. 例題 7.2.1 より $\frac{1}{D_t^2 - 3D_t + 2} e^{3t} = \frac{1}{2} e^{3t}$ だから, 一般解は

$$y = \frac{1}{2} e^{3t} + c_1 e^t + c_2 e^{2t} = \underline{\frac{1}{2} x^3 + c_1 x + c_2 x^2}.$$