

§ 7.1 (p.163)

1. 省略

2. (1) $\int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx$, $\log|y| = \frac{x^3}{3} + c$, $|y| = e^{\log|y|} = e^c e^{\frac{x^3}{3}}$, $y = \pm e^c e^{\frac{x^3}{3}}$. ここで $\pm e^c$ を改めて c と置けば $y = ce^{\frac{x^3}{3}}$ (c は任意定数).

(2) $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{(1+2x)}{x} dx$, $\log|y| = \log|x| + 2x + c$, $|y| = e^{\log|y|} = e^c e^{-\log|x|+2x} = \frac{e^c e^{2x}}{x}$, $y = \pm \frac{e^c e^{2x}}{x}$. ここで $\pm e^c$ を改めて c と置けば $y = ce^{2x}/x$ (c は任意定数).

(3) $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \frac{dx}{x(x+1)}$, $\log|y| = \log|x| - \log|x+1| + c$.

$$\therefore |y| = e^c e^{\log x - \log(x+1)} = e^c \frac{x}{x+1}, \quad y = \pm e^c \frac{x}{x+1}.$$

$\pm e^c$ を改めて c と置けば $y = cx/(x+1)$ (c は任意定数).

(4) $\int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{dx}{1-x}$, $\log|1+y| = -\log|1-x| + c$, $|1+y| = e^c e^{-\log(1-x)} = \frac{e^c}{1-x}$, $y = \frac{\pm e^c - 1 + x}{1-x}$. $\pm e^c - 1$ を改めて c と置けば $y = (c+x)/(1-x)$ (c は任意定数).

(5) $v = x + 2y - 1$ と置くと $v' = 2v + 1$ となるから,

$$\frac{dv}{2v+1} = dx, \quad \frac{1}{2} \log|2v+1| = x + c, \quad \log|2v+1| = 2x + 2c, \quad v = \pm \frac{e^{2c}}{2} e^{2x} - \frac{1}{2}.$$

再び $v = x + 2y - 1$ とし, $\pm e^{2c}/4$ を改めて c とすれば $y = ce^{2x} - x/2 - 1/4$ (c は任意定数).

(6) $v = x + y$ と置くと $v' = e^v$ となるから,

$$-e^{-v} dv = dx, \quad e^{-v} = x + c, \quad e^v = \frac{1}{-c-x}, \quad v = -\log(-c-x).$$

再び $v = x + y$ とし, $-c$ を改めて c とすれば $y = -x - \log(c-x)$ (c は任意定数).

3. (1) $y = xu$ とする. $y' = u + xu'$ より

$$u + xu' = -\frac{x+2xu}{xu}, \quad \frac{u}{(1+u)^2} u' = -\frac{1}{x}, \quad \log(x+xu) + \frac{1}{1+u} = c.$$

再び $y = xu$ とすれば $\log(x+y) + \frac{x}{x+y} = c$ (c は任意定数).

(2) $y = xu$ とする. $y' = u + xu'$ より

$$u + xu' = \frac{2x-xu}{x}, \quad xu' = 2(1-u), \quad u = \frac{c}{x^2} + 1.$$

再び $y = xu$ とすれば $y = \frac{c}{x} + x$ (c は任意定数).

(3) $y = xu$ とする. $y' = u + xu'$ より

$$u + xu' = \frac{1-u}{1+u}, \quad \frac{1+u}{1-2u-u^2} u' = \frac{1}{x}, \quad \log(1-2u-u^2) = \log cx^{-2}.$$

再び $y = xu$ とすれば $x^2 - 2xy - y^2 = c$ (c は任意定数).

(4) $y = xu$ とする. $y' = u + xu'$ より

$$u + xu' = \frac{u^2-1}{u}, \quad xu' = \frac{-1}{u}, \quad \log x^2 + u^2 = c$$

再び $y = xu$ とすれば $x^2 \log x^2 + y^2 = cx^2$ (c は任意定数).

4. c を任意定数とする.

(1) $\int(-1)dx = -x$ より

$$y = e^{-(-x)} \left(\int e^{2x} e^{-x} dx + c \right) = e^x (e^x + c) = \underline{e^{2x} + ce^x}$$

(2) $\int \frac{-2}{x} dx = \log x^{-2}$ より

$$\begin{aligned} y &= e^{-\log x^{-2}} \left(\int (x+2)e^{\log x^{-2}} dx + c \right) = x^2 \left(\int \frac{x+2}{x^2} dx + c \right) \\ &= x^2 \left(\log|x| - \frac{2}{x} + c \right) = \underline{x^2 \log|x| - 2x + cx^2} \end{aligned}$$

(3) $\int 2x dx = x^2$ より

$$y = e^{-x^2} \left(\int x e^{x^2} dx + c \right) = e^{-x^2} \left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c \right) = \underline{\frac{1}{2} + ce^{-x^2}}$$

(4) $y' - \frac{1}{x}y = 1$ 及び $\int \frac{-1}{x} dx = \log x^{-1}$ より

$$y = e^{-\log x^{-1}} \left(\int e^{\log x^{-1}} dx + c \right) = x \left(\int \frac{dx}{x} + c \right) = \underline{x \log|x| + cx}$$

(5) 定数関数 $y = 0$ が 1 つの解である事は明らか. これ以外の解を求める. $z = y^{-1}$ と置く. $z' = -y'y^{-2}$ 及び $-y^{-2}y' + y^{-1} = -x$ より $z' + z = -x$ だから,

$$z = e^{-x} \left(\int -x e^x dx + c \right) = e^{-x} (-x e^x + e^x + c) = \underline{1 - x + ce^{-x}}.$$

従って $y = 1/(1 - x + ce^{-x})$

(6) 定数関数 $y = 0$ が 1 つの解である事は明らか. これ以外の解を求める. $z = y^{-2}$ と置く. $z' = -2y'y^{-3}$ 及び $-2y^{-3}y' + 4y^{-2} = -2e^{2x}$ より $z' + 4z = -2e^{2x}$ だから,

$$z = e^{-4x} \left(\int -2e^{2x} e^{4x} dx + c \right) = \underline{\frac{c - e^{6x}}{3e^{4x}}}$$

従って $\underline{y^2(ce^{-2x} - e^{2x}) = 3}$

5. c を任意定数とする.

(1) $(-x + y + 2)_y = (x - y + 1)_x = 1$ より方程式は完全.

$$\int_0^x (-x+2)dx + \int_0^y (x-y+1)dy = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + (x+1)y - \frac{1}{2}y^2 = c$$

両辺 -2 倍し, $-2c$ を改めて c とすれば $x^2 - 4x - 2(x+1)y + y^2 = c$

(2) $(e^x + 2xy + 2y^2)_y = (x^2 + 4xy + 3)_x = 2x + 4y$ より方程式は完全.

$$\int_0^x e^x dx + \int_0^y (x^2 + 4xy + 3)dy = e^x - 1 + (x^2 + 3)y + 2xy^2 = c$$

$c+1$ を改めて c とすれば $\underline{e^x + (x^2 + 3)y + 2xy^2 = c}$

(3) $(\sin y + 3x^2 - 1)_y = (x \cos y + 2y^3)_x = \cos y$ より方程式は完全.

$$\int_0^x (3x^2 - 1)dx + \int_0^y (x \cos y + 2y^3)dy = x^3 - x + x \sin y + \frac{1}{2}y^4 = c$$

$2c$ を改めて c とすれば $\underline{2x^3 + 2x(\sin y - 1) + y^4 = c}$

6. c を任意定数とする.

(1) $(x + 2y)_y = 2$, $(1)_x = 0$ より方程式は完全ではない. $((x + 2y)_y - (1)_x)/1 = 2$ と x のみの関数となるから

$M(x) = \exp\left(\int 2dx\right) = e^{2x}$ が積分因子となる.

$$\int_0^x x e^{2x} dx + \int_0^y e^{2x} dy = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} (e^{2x} - 1) + e^{2x} y = c$$

$4c - 1$ を改めて c と置けば $(2x + 4y - 1)e^{2x} = c$

(2) $(y^3)_y = 3y^2$, $(2xy^2 + 3y)_x = 2y^2$ より方程式は完全ではない. $((2xy^2 + 3y)_x - (y^3)_y)/y^3 = -1/y$ と y のみの関数

となるから $M(y) = \exp\left(\int \frac{-dy}{y}\right) = y^{-1}$ が積分因子となる.

$$\int_0^x 0 dx + \int_0^y (2xy + 3)y dy = xy^2 + 3y$$

従って一般解は $\underline{xy^2 + 3y = c}$

7. 点 P が (x, y) のとき, C の P に於ける接線の方程式は $Y - y = y'(X - x)$ だから, 点 Q の x 座標は $x - y/y'$. 仮定より $(x + x - y/y')/2 = 0$, 従って $y' = y/2x$ となる. この変数分離形の微分方程式を解いて

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}, \quad \log|y| = \log x^{1/2} + c, \quad y = cx^{1/2} \quad (\pm e^c \text{ を } c \text{ と置く}).$$

(1, 1) を通過するので $c = 1$. $\therefore \underline{C: y = \sqrt{x}}$.

8. $v = 2y - x$ と置く

$$v' = 2y' - 1 = \frac{2y}{2y - x} - 1 = \frac{x}{v}, \quad v^2 = x^2 + c, \quad 4y^2 - 4yx = c$$

(c は任意定数). $c/4$ を改めて c と置けば $y^2 - yx = c$. 初期条件より $c = a^2 - a$ となるから

$$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 4c}}{2} = \frac{1}{2}(x \pm \sqrt{x^2 + 4a^2 - 4a}).$$

再び初期条件を用いると $2a = 1 \pm \sqrt{4a^2 - 4a + 1} = 1 \pm |2a - 1|$. これより $2a > 1$ のとき $y = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4(a^2 - a)}}{2}$, $2a < 1$ のとき $y = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4(a^2 - a)}}{2}$ となり,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1 + 4(a^2 - a)/x^2}}{2} = 1 \quad (2a > 1), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{1 + 4(a^2 - a)/x^2}}{2} = 0 \quad (2a < 1)$$

となる. 一方, $a = 1/2$ のとき, $y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 1}}{2}$ は共に初期条件 $y(1) = 1/2$ を満たす解となる. + の場合は $y/x \rightarrow 1$, - の場合は $y/x \rightarrow 0$ となる為, y/x の $x \rightarrow \infty$ での極限は定まらない.