§ 6.2 (p.157)

1. (1) $\lim \frac{n}{n+1} = \lim \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$ より収束半径は $\underline{\ 1\ }$

(2) $\lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{1+n} = 0$ より収束半径は $\underline{\ 0\ }$

(3) $\lim \sqrt[n]{2^{-n}} = \frac{1}{2}$ より幂級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{2^n}$ の収束半径は 2. $X = x^2$ とすれば $|x| < \sqrt{2}$ の絶対収束し，$|x| > \sqrt{2}$ のとき発散するから，幂級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$ の収束半径は $\underline{\ \sqrt{2}\ }$

(4) $$\lim \frac{\frac{n^n}{n!}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\lim(1+\frac{1}{n})^n} = \underline{\frac{1}{e}}.$$

(5) $$\lim \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} = \lim \frac{(n+1-n)(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{(n+2-n-1)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \underline{\ 1\ }.$$

(6) $\lim \sqrt[n]{|a|^{n^2}} = \lim |a|^n$ より収束半径は $\underline{\ \infty\ (|a|<1),\ 1\ (|a|=1),\ 0\ (|a|>1)}.$

(7) $$\lim \frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}} = \lim \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!!}\frac{(2n+2)!!}{(2n)!!} = \lim \frac{2+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \underline{\ 1\ }.$$

(8) $$\lim \frac{\frac{(2n-1)!!}{n^n}}{\frac{(2n+1)!!}{(n+1)^{n+1}}} = \lim \frac{n+1}{2n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \underline{\frac{e}{2}}.$$

2. (1) p.156 の公式より $$\sqrt{1+x^2} = \underline{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{2n} \quad (|x|<1).}$$

(2) p.156 の公式より $$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \underline{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} \quad (|x|<1).}$$

(3) $(\log(x+\sqrt{1+x^2}))' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ より (2) の両辺を積分する． $\log(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_{x=0} = 0$ だから積分定数は 0.

よって $$\log(x+\sqrt{1+x^2}) = \underline{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1} \quad (|x|<1).}$$

(4) $$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-(-\frac{1}{3}x)}\right) = \underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-3^{n+1}}{4\cdot 3^{n+1}}x^n \quad (|x|<1).}$$

(5) $$x\log(1+2x) = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(2x)^n = \underline{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{n-1}}{n-1}x^n \quad (|x|<\tfrac{1}{2}).}$$

(6) $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ の両辺を微分して $$\frac{1}{(1+x)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} = \underline{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n} \quad (|x|<1).$$

(7) $$\sin(x+\tfrac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x) = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\right).}$$

(8) $y = \cos^{-1}x$ と置く． $0 \le y \le \pi$ である事に注意して，$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - y \le \frac{\pi}{2}$ かつ $x = \cos y = \sin(\frac{\pi}{2}-y)$ だから

$$y = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}x = \underline{\frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}} \qquad (|x|<1).$$

(9) $(1+x)^{1/2} = 1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n$ の両辺を積分，$\frac{3}{2}$ 倍すれば $(1+x)^{\frac{3}{2}} = \underline{1+\dfrac{3}{2}x+\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n 3(2n-5)!!}{(2n)!!}x^n}.$

3. (1) $x^2\log(1+x) = x^2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-2}x^n$ より $\underline{f^{(n)}(0) = 0\ (n \le 2),\quad \dfrac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}\quad (n \ge 3).}$

(2) $(1+x)e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{2n+1}$ より $\underline{f^{(n)}(0) = \frac{(2m)!}{m!} \ (n=2m), \quad \frac{(2m+1)!}{m!} \ (n=2m+1).}$

(3) $\tan^{-1}(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$ より $\underline{f^{(n)}(0) = 0 \ (n=2m), \quad \frac{(-1)^m 2^{2m+1}}{(2m)!} \ (n=2m+1).}$

(4) $\frac{x^2}{x^2-x-2} = \frac{x^2}{3}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 2^{-(n-1)}}{3}x^n$ より

$\underline{f^{(n)}(0) = 0 \ (n<2), \quad \frac{((-1)^{n-1} - 2^{-(n-1)})n!}{3} \ (n \geq 2).}$

4. (1) $t = x-1$ と置く.

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x^2+3x} &= \frac{1}{3}\frac{1}{t+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{\frac{t}{4}+1} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n + \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4^n}t^n \\ &= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+1}+1}{4^n}t^n = \underline{\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+1}+1}{4^n}(x-1)^n}.\end{aligned}$$

(2) $t = x - \frac{\pi}{3}$ と置く.

$$\begin{aligned}\cos x =& \frac{1}{2}\cos t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1} \\ =& \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1}\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \underline{\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\tfrac{\pi}{3})^n, \qquad a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^m}{2(2m)!} & (n=2m) \\ \frac{(-1)^{m+1}\sqrt{3}}{2(2m+1)!} & (n=2m+1) \end{cases} \qquad (m=0,1,2,\cdots).}$$

※ $f(x) = \cos x$ とするとき，Taylor 展開より $a_n = \frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{3})}{n!} = \frac{1}{n!}\cos(\frac{\pi}{3} + n\frac{\pi}{2})$ により与えられる.

5. 倍角の公式を 2 回使えば $\tan 4\theta = \frac{4\tan\theta(1-\tan^2\theta)}{1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta}$. ここに $\tan\theta = \frac{1}{5}$ を代入すれば $\tan 4\theta = \frac{120}{119}$ を得る. 更に加法定理より $\tan(4\theta - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan 4\theta - \tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan 4\theta \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\tan 4\theta - 1}{1+\tan 4\theta}$ だから $\tan 4\theta = \frac{120}{119}$ に代入すれば $\tan(4\theta - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{239}$ を得る. これらと $\tan^{-1}$ の Maclaurin 展開より

$$\pi = 16\theta - 4\tan^{-1}(\tfrac{1}{239}) = 16\tan^{-1}(\tfrac{1}{5}) - 4\tan^{-1}(\tfrac{1}{239}) = 16\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{1}{5^n} - 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{1}{239^n}.$$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ の収束半径をそれぞれ R, R' とする.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n||x|^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n||x|^n = |z|\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n||x|^{n-1}$$

より $0 \leq R' \leq R$ となる. $R=0$ ならば $R'=0$ だから $R=R'$ である. 一方，$R>0$ だとする. $|x|<R$ となる x に対し $|x|<r<R$ となる $r>0$ がとれる. $\sum_n |a_n|r^n$ は収束するから数列 $\{|a_n|r^n\}$ は有界，即ち $|a_n|r^n \leq M$ となる正数 M が存在し，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|n a_n x^{n-1}| \leq \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^n\left(\frac{|x|}{r}\right)^{n-1} \leq \frac{M}{r}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{|x|}{r}\right)^{n-1}$$

となる. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ の収束半径は $\lim \frac{n}{n+1} = 1$ だから，$|x|/r < 1$ より $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ は絶対収束する. 故に $R \leq R'$，従って $R = R'$ である. □