§ 6.1 (p.146)

1. $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とすれば，仮定より数列 $\{A_n\}$ は和 $S = \sum_{k=1}^\infty a_k$ に収束する． $a_n = A_n - A_{n-1} = (A_n - S) + (S - A_{n-1}) \to 0 + 0 \ (n \to \infty)$ より $\lim a_n = 0$ となる． □

2. (1) $A_n = \sum_{m=1}^n a_m^k$ と置く． $a_n > 0$ より $\{A_n\}$ は単調増加数列だから上に有界，即ち任意の n に対し $A_n \leq M$ となる正数 M が存在する事を示せば $\sum_{m=1}^\infty a_m^k$ は収束する事が分かる (p.3 公理).

$0 < \varepsilon < 1$ となる ε を固定する．前問より $a_n < \varepsilon \ (n \geq N)$ となる N が存在． $n \geq N$ ならば $a_n^k < \varepsilon^k$ だから

$$\sum_{n \geq N} a_n^k < \sum_{n \geq N} \varepsilon^k \leq \sum_{n=1}^\infty \varepsilon^k = \frac{1}{1-\varepsilon} < \infty.$$

従って任意の n に対し $A_n \leq A_N + 1/(1-\varepsilon)$，よって $\sum_{n=1}^\infty a_n^k$ は収束する．
(2) 相加平均と相乗平均の関係より

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{a_k a_{k+1}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{a_k + a_{k+1}}{2} \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n a_k + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} a_k \leq \sum_{k=1}^\infty a_k < \infty.$$

故に $\sum_{k=1}^\infty \sqrt{a_k a_{k+1}}$ は収束する．
(3) 仮定より $b_n < 1 \ (n \geq N)$ となる N が存在． $n \geq N$ となる任意の n に対し

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sum_{k=1}^{N-1} a_k b_k + \sum_{k=N}^n a_n \leq \sum_{k=1}^{N-1} a_k b_k + \sum_{k=N}^\infty a_n < \infty$$

だから $\sum_{k=1}^\infty a_k b_k$ は収束する． □

3. (1) $a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ のとき， $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1$． Cauchy の判定法より $\sum a_n$ は収束する．
(2) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} 2^{-n}$ のとき，

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} 2^{-n}} = \frac{1}{2}\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1.$$

Cauchy の判定法より $\sum a_n$ は発散する．
(3) $a_n = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2} e^n$ のとき，

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = e \lim\left\{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right\}^{-1} = e \times \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e} < 1.$$

Cauchy の判定法より $\sum a_n$ は収束する．
(4) $a_n = a^{n^2} b^n$ のとき $\lim \sqrt[n]{a_n} = b \lim a^n$． Cauchy の判定法より $\sum a_n$ は $a < 1$ ならば収束， $a > 1$ ならば発散． $a = 1$ のとき， $\sum a_n = \sum b^n$ (等比級数の和) より， $b < 1$ ならば収束， $b \geq 1$ ならば発散する． □

4. (1) $a_n = \frac{1}{n!}$ のとき， $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$ だから，d'Alembert の判定法より $\sum a_n$ は収束する．
(2) $a_n = \frac{n^n}{n!}$ のとき， $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$ だから，d'Alembert の判定法より $\sum a_n$ は発散する．
(3) $a_n = n \sin \frac{\pi}{2^n}$ のとき，倍角の公式より

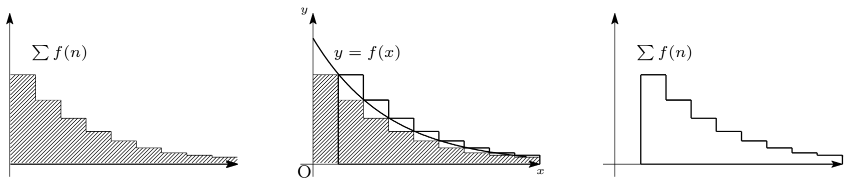
$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n \sin\frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{2}\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} < 1$$

だから，d'Alembert の判定法より $\sum a_n$ は収束する．
(4) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ のとき，

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{2}\lim\frac{(1+1/n)}{(2+1/n)} = \frac{1}{4} < 1$$

だから，d'Alembert の判定法より $\sum a_n$ は収束する．
(5) $a_n = \frac{(a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)\cdots(nb+1)}$ のとき，$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{a+1/(n+1)}{b+1/(n+1)} = \frac{a}{b}$．d'Alembert の判定法より $\sum a_n$ は $a < b$ ならば 収束，$a > b$ ならば発散する．また $a = b$ のときは $a_n = 1$ だから $\sum a_n$ は発散する． □

5. (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ が収束するとき，$f(x) \le f(n) \quad (x \in [n, n+1])$ より $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ (下図参照)． 従って $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ も収束する．一方，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ が発散するとき，$f(x) \le f(n+1) \quad (x \in [n, n+1])$ より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le \int_0^{\infty} f(x)dx$ (下図参照)． 従って $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ も発散する．



(2) $a \ne 1$ ならば $\displaystyle\int \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a}x^{1-a} + C$． これより $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a}$ は $a < 1$ ならば発散，$a > 1$ ならば収束する． また $a = 1$ ならば $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log x + C$ だから $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ は発散． これと (1) より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ が収束する事と $a > 1$ である事は同値となる． □

6. $A_n = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ と置く． $a_{2k-1} - a_{2k} \ge 0$ より $A_{2n} = \sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1} - a_{2k})$ は $\{A_{2n}\}$ は単調増加. $a_{2k} - a_{2k+1} \ge 0$ 及び $A_{2n} = a_1 - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{2k} - a_{2k+1}) - a_{2n} \le a_1$ より有界だから $\{A_{2n}\}$ は収束する． $A = \lim A_{2n}$ とすれば $\lim A_{2n+1} = \lim(A_{2n} + a_{2n+1}) = A + 0 = A$ だから $\lim A_n = A$ となる．

$a_n = 1/n$ とすれば $a_n > 0$，$\lim a_n = 0$ かつ $a_n > a_{n+1}$ だから $\sum(-1)^n/n$ は収束する． □