§ **5.4** (p.133)

1. 与えられた図形を V とする.

(1) $(x,y,z)\in V$ ならば $(\pm x,\pm y,\pm z)\in V$ となる事に注意すれば $x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$ となる領域内にある部分 V_0 の体積

$$v(V_0)=\iiint_{V_0}dxdydz=\iint_D c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\geq 0,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\}$$

を 8 倍すれば V 全体の体積となる. $x=ar\cos\theta,\ \ y=br\sin\theta\ \ E=\{(r,\theta):0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq\pi/2\}$ と置く.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{bmatrix}, \qquad \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=abr$$

と変数変換公式より

$$\begin{aligned}v(V_0)&=c\iint_E\sqrt{1-\frac{(ar\cos\theta)^2}{a^2}-\frac{(br\sin\theta)^2}{b^2}}\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|drd\theta\\ &=abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr\right)d\theta=abc\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{\pi}{6}abc.\end{aligned}$$

従って V 全体の体積は $8\times v(V_0)=\underline{\frac{4}{3}\pi abc}.$

(2) $(x,y,z)\in V$ ならば $(\pm x,\pm y,\pm z)\in V$ となる事に注意すれば $x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$ となる領域内にある部分 V_0 の体積

$$v(V_0)=\iiint_{V_0}dxdydz=\iint_D\left(a^{2/3}-x^{2/3}-y^{2/3}\right)^{3/2}dxdy \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\geq 0,\ x^{2/3}+y^{2/3}\leq a^{2/3}\}$$

を 8 倍すれば V 全体の体積となる. $x=ar^3\cos^3\theta,\ \ y=ar^3\sin^3\theta\ \ E=\{(r,\theta):0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq\pi/2\}$ と置く.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3ar^2\cos^3\theta & -3ar^3\sin\theta\cos^2\theta\\ 3ar^2\sin^3\theta & 3ar^3\cos\theta\sin^2\theta\end{bmatrix},$$

$$\therefore\quad \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=9a^2r^5\cos^4\theta\sin^2\theta+9a^2r^5\cos^2\theta\sin^4\theta=9a^2r^5\cos^2\theta\sin^2\theta$$

と変数変換公式より

$$\begin{aligned}v(V_0)&=\iint_D\left(a^{2/3}-a^{2/3}r^2\cos^2\theta-a^{2/3}r^2\sin^2\theta\right)^{3/2}9a^2r^5\cos^2\theta\sin^2\theta drd\theta\\ &=9a^3\int_0^1 r^5\left(1-r^2\right)^{3/2}dr\cdot\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta\\ &\underset{s\,=\,r^2}{=}9a^3\int_0^1 s^2(1-s)^{3/2}\frac{ds}{2}\cdot\int_0^{\pi/2}(\sin^2\theta-\sin^4\theta)d\theta\\ &\underset{t\,=\,1\,-\,s}{=}\frac{9}{2}a^3\int_0^1(1-t)^2t^{3/2}dt\cdot\frac{\pi}{16} \qquad\qquad =\frac{9}{2}a^3\times\frac{16}{315}\times\frac{\pi}{16}=\frac{\pi}{70}a^3.\end{aligned}$$

従って V 全体の体積は $8\times v(V_0)=\underline{\frac{4}{35}\pi a^3}.$

(3) $D=\{(x,y):(x-1)^2+y^2\leq 1\}$ とすると

$$v(V)=\iiint_V dxdydz=\iint_D\{2x-(x^2+y^2)\}dxdy=\iint_D\{1-((x-1)^2+y^2)\}dxdy$$

$x=1+r\cos\theta, y=r\sin\theta,\ \ E=\{(r,\theta):0\leq r\leq 1, 0\leq\theta\leq 2\pi\}$ と置けば $\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ だから

$$v(V)=\iint_E(1-r^2)rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1(r-r^3)drd\theta=\underline{\frac{\pi}{2}}.$$

(4) $X=x+y,\ Y=y+z,\ Z=z+x,\ V'=\{(X,Y,Z):0\le X,Y,Z\le 1\}$ とする.

$$\frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(x,y,z)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z}\\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z}\\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

より $\det\frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(x,y,z)}=2,\ \det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(X,Y,Z)}=1/2$ となる.

$$v(V)=\iint_V dxdydz=\iiint_{V'}|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(X,Y,Z)}|dXdYdZ=\frac{1}{2}\iiint_{V'}dXdYdZ=\underline{\frac{1}{2}}$$

(5) $z=(x^2+y^2+z^2)^2\ge 0,\ \sqrt{z}-z^2=x^2+y^2\ge 0$ より $0\le z\le 1$ となる事に注意する．図形の平面 $z=z\ \ (0\le z\le 1)$ による断面は $x^2+y^2=\sqrt{z}-z^2$，即ち原点中心で半径 $\sqrt{\sqrt{z}-z^2}$ の円だから,

$$v(V)=\int_0^1\pi(\sqrt{z}-z^2)dz=\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=\underline{\frac{\pi}{3}}.$$

2. x 軸に直交する平面による V の断面は半径 $f(x)$ の円だから，断面積は $\pi f(x)^2$.

$$\therefore\quad v(V)=\iiint_V dxdydz=\int_a^b(\text{平面 } x=x \text{ による断面積})dx=\pi\int_a^b f(x)^2dx.$$

□

3. (1) 前問の公式を利用する． $x=t+\pi/2$ とすれば

$$V=\pi\int_0^\pi\sin^2 xdx=\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 tdt=2\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2 tdt=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\underline{\frac{\pi^2}{2}}$$

(2) 前問の公式を利用する． y 軸に関し対称である事に注意すれば

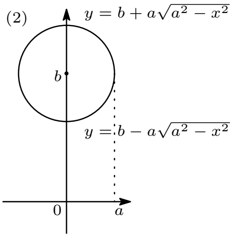
$$\begin{aligned}V=&2\pi\int_0^a(b+\sqrt{a^2-x^2})^2dx-2\pi\int_0^a(b-\sqrt{a^2-x^2})^2dx\\ =&8\pi\int_0^a b\sqrt{a^2-x^2}dx\underset{\substack{x=a\cos\theta\\ \text{と置換}}}{=}8\pi b\int_{\pi/2}^0\sqrt{a^2-a^2\cos^2\theta}\cdot(-a\sin\theta)d\theta\\ =&8\pi a^2b\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta=8\pi a^2b\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\underline{2\pi^2a^2b}\end{aligned}$$

(3) 平面 $z=a$ での切断面 $D(a)$ の断面積を $S(a)$ と置くと

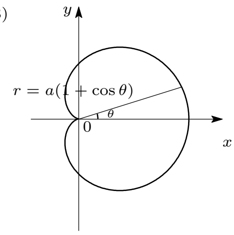
$$\begin{aligned}S(a)=&\iint_{D(a)}dxdy=\iint_{0\le r\le a(1+\cos\theta)}rdrd\theta\\ =&\int_0^{2\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)}rdrd\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta\\ =&\frac{a^2}{2}\Big[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{4}\Big]_0^{2\pi}=\frac{3\pi}{2}a^2.\end{aligned}$$

故に $V=\int_0^1 S(a)da=\frac{3\pi}{2}\int_0^1 a^2da=\underline{\frac{\pi}{2}}.$

(2)



(3)



4. (1) $y^2 + z^2 = a^2$ は xy 平面, yz 平面, 及び zx 平面に関して対称だから，領域 $x, y, z \geq 0$ 内にある部分の曲面積を 8 倍すれば全体の曲面積が得られる． $y^2 + z^2 = a^2$ により定まる x, y の陰関数 z を x, y で偏微分すれば $zz_x = 0$， $zz_y = -y$ だから $\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} = a/z$． よって曲面積 S は

$$S = 8\iint_{\substack{x^2+y^2 \leq a^2, \\ x,y \geq 0}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}} dxdy = 8a\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - y^2}} dx\right) dy = 8a\int_0^a dy = \underline{8a^2}$$

(2) $y^2 + z^2 = a^2$ は xy 平面, yz 平面, 及び zx 平面に関して対称だから，領域 $x, y, z \geq 0$ 内にある部分の曲面積を 8 倍すれば全体の曲面積が得られる． $y^2 + z^2 = a^2$ により定まる x, y の陰関数 z について $\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} = a/z$ となる． また球の内部は $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2a^2$ に $y^2 + z^2 = a^2$ を代入すれば $x^2 + a^2 \leq 2a^2$， $0 \leq x \leq a$． これと $y^2 + z^2 = a^2$ の陰関数の定義域を合わせれば

$$S = 8\iint_{\substack{0 \leq x \leq a, \\ 0 \leq y \leq a}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}} dxdy = 8\int_0^a \left(\int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}} dx\right) dy = 8a^2\int_0^a \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \underline{4\pi a^2}$$

※ 教科書の解答は $4\pi a^2(3 - \sqrt{2})$ となっているが， これは教科書側の誤植 (教科書の解答は上記の切り取られた円柱の表面積の他に球面の円柱外部にある部分の曲面積 $4\pi a^2(2 - \sqrt{2})$ を加えたものである)．

(3) 平面 $z = a$ より下の部分， 即ち領域 $x^2 + y^2 \leq a$ 上の曲面の曲面積 S を求めればよい．

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2 \leq a} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy = \iint_{x^2+y^2 \leq a} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy \\ &= \iint_{r^2 \leq a} \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{a}} r\sqrt{1 + r^2} dr\right) d\theta = \underline{\frac{\pi}{6}\{(4a + 1)^{3/2} - 1\}}. \end{aligned}$$

(4) 円柱の内部 $x^2 + y^2 \leq a^2$ にある曲面の曲面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{1 + y^2 + x^2} dxdy \\ &= \iint_{0 \leq r \leq a^2} \sqrt{1 + r^2} r dr d\theta = 2\pi\int_0^a r\sqrt{1 + r^2} dr = \underline{\frac{2\pi}{3}\{(a^2 + 1)^{3/2} - 1\}}. \end{aligned}$$

(5) 回転放物面の上部 $x^2 + y^2 \leq 2z + 1$ にある曲面の曲面積を S とする．

$$4x^2 + 4y^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2 \leq 16, \quad (x^2 + y^2 + 1)^2 \leq 16$$

より， この曲面の存在する領域は $x^2 + y^2 \leq 3$ となる．

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2 \geq 3} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy = \iint_{x^2+y^2 \leq 3} \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dxdy \\ &= \iint_{0 \leq r \leq 3} \frac{2r}{\sqrt{4 - r^2}} dr d\theta = 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2r}{\sqrt{4 - r^2}} dr = \underline{4\pi}. \end{aligned}$$

5. 次の図形の曲面積を求めよ $(a>0)$.

(1) 曲線 $y=\sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$ を x 軸の周りに回転した図形.

(2) Catenary $y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a}) \quad (-a \leq x \leq a)$ を x 軸の周りに回転した図形.

(3) Asteroid $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ を x 軸の周りに回転した図形.

(4) 円 $x^2+(y-b)^2=a^2 \quad (a<b)$ を x 軸の周りに回転した図形.

【解答】(1)

$$\begin{aligned} S=&2\pi\int_0^{2\pi}|f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}dx=2\pi\int_0^{2\pi}|\sin x|\sqrt{1+\cos^2 x}dx \\ =&8\pi\int_0^{\pi/2}\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}dx \underset{\substack{t=\sin x \\ \text{と置換}}}{=} 8\pi\int_0^1\sqrt{1+t^2}dt \end{aligned}$$

$I=\int\sqrt{1+t^2}dt$ と置く．部分積分より

$$I=t\sqrt{1+t^2}-\int t\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt=t\sqrt{1+t^2}-I+\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \therefore \quad 2I=t\sqrt{1+t^2}+\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$s=t+\sqrt{1+t^2}$ とすると $\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\int\frac{ds}{s}=\log|s|=\log|t+\sqrt{1+t^2}|$. これと上の等式とを併せれば

$$S=8\pi\Big[\frac{1}{2}(t\sqrt{1+t^2}+\log(t+\sqrt{1+t^2}))\Big]_0^1=\underline{4\pi(\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2}))}$$

(2)

$$\begin{aligned} S=&2\pi\int_{-a}^{a}|\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})|\sqrt{1+(\frac{1}{2}(e^{x/a}-e^{-x/a}))^2}dx \\ =&\pi a\int_0^a(e^{2x/a}+2+e^{-2x/a})dx=\underline{\frac{\pi}{2}(e^2+4-e^{-2})a^2} \end{aligned}$$

(3) 曲面積を S とする．第 1 象限内にある部分の回転体の曲面積を 2 倍すれば全曲面積となる.

$$S=4\pi\int_0^a(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}\sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}dx=4\pi a^{1/3}\int_0^a(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}x^{-1/3}dx$$

$t=x^{2/3}$ とすれば $3dt/2=x^{-1/3}dx$ だから

$$S=6\pi a^{1/3}\int_0^{a^{2/3}}(a^{2/3}-t)^{3/2}dt=\underline{\frac{12}{5}\pi a^2}$$

(4) 全曲面積 S は $y=b+\sqrt{a^2-x^2}$ の回転面の曲面積と，$y=b-\sqrt{a^2-x^2}$ の回転面の曲面積の和である．それぞれの曲面は y 軸に関し対称だから，第 1 象限内にある部分の回転体の表面積を 2 倍すればよい.

$$\begin{aligned} S=&2\cdot 2\pi\int_0^a(b+\sqrt{a^2-x^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx+2\cdot 2\pi\int_0^a(b-\sqrt{a^2-x^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \\ =&8\pi ab\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=8\pi ab\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\underline{4\pi^2 ab} \end{aligned}$$

□