

§ 5.3 (p.126)

1. (1) C 上の点は $(x, y) = (1-t, 1+t)$ ($0 \rightarrow t \rightarrow 2$) と表される. $dx = -dt$, $dy = dt$ だから

$$(\text{与式}) = \int_0^2 ((1-t)^2(-dt) + 2(1-t)(1+t)dt) = \int_0^2 (1+2t-3t^2)dt = \underline{-2}.$$

(2) C 上の点は $(x, y) = (t, t^2)$ ($0 \rightarrow t \rightarrow 2$) と表される. $dx = dt$, $dy = 2tdt$ だから

$$(\text{与式}) = \int_0^2 (t^3 dt + e^{t^2} 2t dt) = \int_0^2 (t^3) dt + \int_0^2 \frac{d(e^{t^2})}{dt} dt = \underline{3 + e^4}.$$

(3) $dx = -\sin t dt$, $dy = \cos t dt$ だから

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int_0^\pi (\sin^2 t (-\sin t) dt + \cos^2 t \cos t dt) \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\sin^3(t + \pi/2) + \cos^3(t + \pi/2)) dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\cos^3 t - \sin^3 t) dt = -2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 t dt \quad (\text{偶関数, 奇関数に注意}) \\ &= \underline{-\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

2. (C に囲まれた) 単位閉円盤を D とする.

(1) Green の定理より

$$(\text{与式}) = \iint_D ((y^4 + x^3)_x - (e^x + y)_y) dx dy = \iint_D (3x^2 - 1) dx dy.$$

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $E = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ とすれば変数変換公式より

$$(\text{与式}) = \iint_E (3r^2 \cos^2 \theta - 1) |r| dr d\theta = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (3r^3 \cos^2 \theta - r) d\theta \right) dr = \underline{-\frac{\pi}{4}}.$$

(2) Green の定理より (与式) $= \iint_D ((3y^2 x - x)_x - (y^3 - y)_y) dx dy = \underline{0}$

3. D の面積は $S(D) = \iint_D 1 dx dy$ により与えられる. 一方, Green の定理より

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} x dy &= \iint_D ((x)_x - (0)_y) dx dy = S(D), \\ \int_{\partial D} (-y) dx &= \iint_D ((0)_x - (-y)_y) dx dy = S(D), \\ \int_{\partial D} ((-y/2) dx + (x/2) dy) &= \iint_D ((x/2)_x - (-y/2)_y) dx dy = S(D). \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned} S(D) &= \int_0^{2\pi} a \cos^3 \theta \cdot 3a \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = 3a^2 \int_0^{2\pi} (\cos^4 \theta - \cos^6 \theta) d\theta \\ &= 6a^2 \int_0^\pi (\cos^4 \theta - \cos^6 \theta) d\theta = 6a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^4 \theta - \sin^6 \theta) d\theta \\ &= 12a^2 \int_0^{\pi/2} (\sin^4 \theta - \sin^6 \theta) d\theta = a^2 \frac{3}{4} \frac{\pi}{2} = \underline{\frac{3\pi}{8} a^2} \end{aligned}$$

(2) $y = r \sin \theta$ のとき, $dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$. 更に $r = a(1 + \cos \theta)$ のとき, $dr = a(-\sin \theta)d\theta$ だから

$$\begin{aligned} S(D) &= \int_{\partial D} r \cos \theta (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} \{a(1 + \cos \theta) \cos \theta \sin \theta a(-\sin \theta)d\theta + a^2(1 + \cos \theta)^2 \cos^2 \theta d\theta\} \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \{-(1 + \cos \theta) \cos \theta \sin^2 \theta + (1 + \cos \theta)^2 \cos^2 \theta\} d\theta \\ &= 2a^2 \int_0^{\pi} \{(1 - \cos \theta) \cos \theta \sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2 \cos^2 \theta\} d\theta \\ &= 2a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \{(1 + \sin \theta)(-\sin \theta) \cos^2 \theta + (1 + \sin \theta)^2 (-\sin^2 \theta)\} d\theta \\ &= 8a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta = \frac{3}{2}\pi a^2 \end{aligned}$$

(3) $x = \cos t$ のとき, $dx = -\sin t dt$ だから

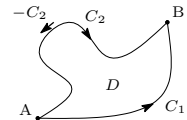
$$\begin{aligned} S(D) &= - \int_0^{2\pi} \sin^5 t (-\sin t dt) = \int_0^{2\pi} \sin^6 t dt \\ &= 2 \int_0^{\pi} \sin^6 t dt = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^6 t dt = 4 \frac{5}{6} \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8} \end{aligned}$$

4. (説明 (厳密な証明ではない)) $\omega = Pdx + Qdy$ とする. 点 A から点 B への曲線 C_1, C_2 をとる. この曲線に対し C_1 及び C_2 の逆の道 $-C_2$ を結んで A を基点とする閉路を $C = C_1 + (-C_2)$ とすると

$$\int_{C_1} \omega - \int_{C_2} \omega = \int_{C_1 - C_2} \omega = \oint_C \omega.$$

C で囲まれる領域を D とする (右図) と $C = \partial D$ だから, Green の定理と仮定より

$$\oint_C \omega = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy = 0. \quad \therefore \int_{C_1} \omega = \int_{C_2} \omega.$$



5. dx, dy の係数をそれぞれ P, Q と置く.

(1) $P = e^x + 2xy, P_y = 2x, Q = e^{2y} + x^2, Q_x = x^2$ より $Q_x = P_y$. よって問題 4 よりこの積分は道のとり方に依らない.

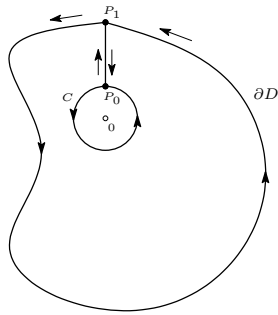
(2) $P = yf(xy), P_y = f(xy) + xyf'(xy), Q = xf(xy), Q_x = f(xy) + xyf'(xy)$ より $Q_x = P_y$. よって問題 4 よりこの積分は道のとり方に依らない.

6. $\omega = Pdx + Qdy, P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$ と置く.

$$P_y = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, Q_x = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \therefore Q_x = P_y$$

(0,0) $\notin D$ の場合, P, Q は D 上 C^1 級だから, 問題 4 より $\oint_{\partial D} \omega = 0$.

一方, 下図のように P_0 を基点とする 2 つの閉曲線 $C' = P_0 \rightarrow P_1 \xrightarrow{\partial D} P_1 \rightarrow P_0$, 及び C (原点を中心とする円周) を考える.



この曲線で囲まれる領域を E とすれば E 上で P, Q は C^1 級かつ $Q_x = P_y$ となるから、問題 4 より $\oint_{C'} \omega = \oint_C \omega$ となる。 $\oint_{C'} \omega = \left\{ \int_{P_0 \rightarrow P_1} + \int_{\partial D} + \int_{P_1 \rightarrow P_0} \right\} \omega$ 及び $\int_{P_1 \rightarrow P_0} = - \int_{P_0 \rightarrow P_1}$ より $\oint_{C'} \omega = \int_{\partial D} \omega$ 、従って $\oint_{\partial D} \omega = \int_C \omega$ となる。 C の半径を r とするとき、 C 上の点は $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) と表される。従って $dx = -r \sin \theta d\theta$, $dy = r \cos \theta d\theta$ と併せて

$$\oint_C \omega = \int_0^{2\pi} \left\{ -\frac{r \sin \theta}{r^2} (-r \sin \theta) d\theta + \frac{r \cos \theta}{r^2} r \cos \theta \right\} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

従って $\oint_{\partial D} \omega = 2\pi$ となる。