§ 5.2 (p.121)

絶対値 $|\cdot|$ の記号と行列式の記号を混同する恐れがあるため，$|x|$ を $\mathrm{abs}\, x$ と記す事にする．

1. (1) $E=\{(r,\theta): a\le r\le 2a,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$ とすれば，$m\neq 1$ のとき，

$$(\text{与式})=\iint_E \frac{|r|drd\theta}{r^{2m}}=\int_0^{2\pi}\left(\int_a^{2a} r^{1-2m}dr\right)d\theta=2\pi\Big[\frac{1}{2-2m}r^{2-2m}\Big]_a^{2a}=\underline{\frac{(2^{2-2m}-1)\pi}{1-m}a^{2-2m}}$$

$m=1$ のとき，

$$(\text{与式})=\iint_E \frac{|r|drd\theta}{r^2}=\int_0^{2\pi}\left(\int_a^{2a} r^{-1}dr\right)d\theta=2\pi\left[\log r\right]_a^{2a}=\underline{2\pi\log 2}$$

(2) $E=\{(r,\theta): 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$ とすれば，

$$(\text{与式})=\iint_E \sqrt{1-r^2}|r|drd\theta=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r(1-r^2)^{1/2}dr\right)d\theta=2\pi\Big[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}\Big]_0^1=\underline{\frac{2\pi}{3}}$$

(3) $E=\{(r,\theta): 0\le r\le\cot\theta,\ -\pi/2\le\theta\le\pi/2\}$ (p.120 例題 5.2.4 参照) とすれば，

$$(\text{与式})=\iint_E r\cos\theta|r|drd\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos\theta} r^2dr\right)\cos\theta d\theta=\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta d\theta=\frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\underline{\frac{\pi}{8}}$$

2. (1) $u=x+y,\ v=x-y\ \ (x=\frac{u+v}{2},\ y=\frac{u-v}{2})$ と置く．また $E=\{(u,v): 0\le u\le 2,\ 0\le v\le 2\}$ とする．

$$\mathrm{abs}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\mathrm{abs}\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\mathrm{abs}(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

と変数変換公式より

$$(\text{与式})=\iint_E ve^u\frac{1}{2}dudv=\frac{1}{2}\int_0^2 e^udu\times\int_0^2 vdv=\underline{e^2-1}.$$

(2) $x=ar\cos\theta,\ y=b\sin\theta,\ E=\{(r,\theta): 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$ とする．

$$\mathrm{abs}\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{vmatrix}=ab|r|$$

と変数変換公式より

$$(\text{与式})=\iint_E a^2r^2\cos^2\theta ab|r|drd\theta=a^3b\int_0^1 r^3dr\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=\underline{\frac{\pi}{4}a^3b}.$$

(3) $x+y=u,\ y=v\ \ (x=u-v,\ y=v),\ E=\{(u,v): u^2+v^2\le 1\}$ とする．

$$\mathrm{abs}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

と変数変換公式より (与式) $=\iint_E u^4dudv$．更に $u=r\cos\theta, v=r\sin\theta,\ E'=\{(r,\theta): 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$ とすば

$$(\text{与式})=\iint_{E'} r^4\cos^4\theta rdrd\theta=\int_0^1 r^3dr\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=\underline{\frac{\pi}{4}a^3b}.$$

3. (1) (r,θ,φ) を空間極座標，即ち $x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$ となるものとする．空間極座標に関する Jacobi 行列は

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{bmatrix}$$

従って Jacobi 行列式は

$$
\begin{aligned}
&\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\\
=&\cos\theta\begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\end{vmatrix}-(-r\sin\theta)\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 3 行に関する}\\ \text{余因子展開}\end{array}\right)\\
=&r^2\cos^2\theta\sin\theta\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}+r^2\sin^3\theta\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}\\
=&r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\sin\theta\times(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r^2\sin\theta
\end{aligned}
$$

となる． また D は空間極座標により

$$E=\{(r,\theta,\varphi):0\le r\le a,\ 0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le\varphi\le\pi/2\}$$

と表される． これらと変数変換公式より

$$
\begin{aligned}
(\text{与式})&=\iiint_E r\sin\theta\cos\varphi|r^2\sin\theta|drd\theta d\varphi\\
&=\left(\int_0^a r^3dr\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi\right)=\underline{\frac{\pi a^4}{16}}\ .
\end{aligned}
$$

(2) D は空間極座標により

$$E=\{(r,\theta,\varphi):0\le r\le a,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$$

と表される． これらと変数変換公式より

$$(\text{与式})=\iiint_E r^2|r^2\sin\theta|drd\theta d\varphi=\left(\int_0^a r^4dr\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right)=\underline{\frac{4\pi a^5}{5}}\ .$$

4. $D'=\{(r,\theta):\alpha\le\theta\le\beta,\ 0\le r\le f(\theta)\}$ とすれば

$$S(D)=\iint_D dxdy=\iint_{D'}rdrd\theta=\int_\alpha^\beta\left(\int_0^{f(\theta)}rdr\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2d\theta.$$

(1) $r\ge 0$ となる範囲が $0\le\theta\le\pi$ である事に注意して

$$S(D)=\frac{1}{2}\int_0^\pi\sin^2\theta d\theta=\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta=\underline{\frac{\pi}{4}}$$

(2) 範囲 $0\le\theta\le\pi/4$ にある部分を 4 倍すればよい． $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\ \ (r>0)$ とすれば

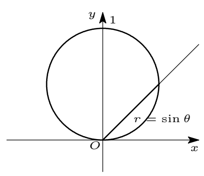
$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2,\qquad r^4=r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta,\qquad r^2=\cos 2\theta$$

だから， $S(D)=4\times\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta d\theta=\underline{1}$

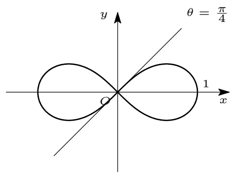
(3) 範囲 $0\le\theta\le\pi$ にある部分を 2 倍すればよい．

$$S(D)=2\times\frac{1}{2}\int_0^\pi a^2(1+\cos\theta)^2d\theta=a^2\int_0^\pi(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta=\underline{\frac{3\pi}{2}a^2}$$

(1)



(2)



(3)