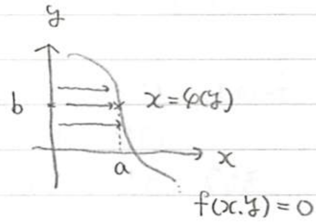
P. 106 1

$f_x^2 + f_y^2 \neq 0$ より $f_x(a,b) \neq 0$ または $f_y(a,b) \neq 0$ が成立. 今 $f_x(a,b) \neq 0$ と仮定すると
陰関数定理より b を含む開区間 $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$
で定義された関数 $\psi(y)$ で



$$a = \psi(b), \quad f(\psi(y), y) = 0 \quad (b-\varepsilon < y < b+\varepsilon)$$

となるものが存在. さらに $\frac{dx}{dy}(b) = -\frac{f_y(a,b)}{f_x(a,b)}$ が成立する.

「$f(a,b)=0$ の (a,b) における接線」=「グラフ $x=\psi(y)$ の (a,b) における接線」であり.
後者の方程式は $x-a = \frac{dx}{dy}(b)(y-b)$ により与えられるから.

$$x-a = -\frac{f_y(a,b)}{f_x(a,b)}(y-b) \qquad \therefore \ f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) = 0.$$

$f_y(a,b) \neq 0$ のときも同様の議論により上の式が導かれる. ▨

P. 106 2

(2) $f(x,y) = \cos x + 2y\cos xy + 2x\cos y - \pi$ と置く.

$$f_x = -\sin x - 2y^2 \sin xy + 2\cos y.$$
$$f_y = 2\cos xy - 2xy\sin xy - 2x\sin y$$

$f_y(\frac{\pi}{2}, 0) = 2 \neq 0$ と陰関数定理より $x = \frac{\pi}{2}$ の近傍 I 上定義された関数 $\varphi(x)$ で

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f(x, \varphi(x)) = 0, \quad (x \in I)$$

となるものが存在する. 再び陰関数定理より

$$\varphi'(x) = \frac{\sin x + 2y^2 \sin xy - 2\cos y}{2\cos xy - 2xy\sin xy - 2x\sin y} /\!/, \quad \varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1+0-2\cdot 1}{2\cos 0 - 0 - 0} = -\frac{1}{2} /\!/$$

※ $y = \varphi(x)$ の具体的な形は求められないので, $\varphi'(x)$ において y はそのまま放置する. ▨

(1) も同様. 省略.

No.

DATE

P.106 3

(2) $f(x,y)=xe^{2y}-e^{xy}+\sin\pi xy+y$ と置く.

$f_x=e^{2y}-ye^{xy}+\pi y\cos\pi xy$, $\quad f_y=2xe^{2y}-xe^{xy}+\pi x\cos\pi xy+1$

$f_x(0,1)=e^2+\pi-1$, $f_y(0,1)=1$, 及び 問題1より P における接線の方程式は
$(e^2+\pi-1)x+y-1=0$〃 　一方, $\vec{n}=(e^2+\pi-1,1)$ が法線ベクトルとなるから
法線上の点 (x,y) は パラメーター t を用いて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} e^2+\pi-1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表わされる. これより t を消去して $x-(e^2+\pi-1)(y-1)=0$〃

(1)も同様. 省略.

P.106 4

(2) y を x の関数と考え, 与式の両辺を x で微分すると

$$3x^2-9y^2y'+4xy+2x^2y'=0. \qquad 3x^2+4xy-(9y^2-2x^2)\cdot y'=0. \quad \cdots ①$$

再にこの両辺を x で微分して

$$6x+4y+4xy'-(18y\cdot y'-4x)\cdot y'-(9y^2-2x^2)\cdot y''=0. \quad \cdots ②$$

元の式で $x=1$ とすると $1^3-3\varphi(1)^3+2\cdot1^2\cdot\varphi(1)=-(\varphi(1)-1)(3\varphi(1)^2+3\varphi(1)+1)=0$.
$3\varphi(1)^2+3\varphi(1)+1>0$ より $\varphi(1)=1$. これと①より

$$3\cdot1^2+4\cdot1\cdot\varphi(1)-(9\cdot\varphi(1)^2-2\cdot1^2)\cdot\varphi'(1)=0, \qquad \therefore \varphi'(1)=1〃$$

これと②より

$$6+4\cdot1+4\cdot1\cdot1-(18\cdot1\cdot1-4\cdot1)\cdot1-(9\cdot1^2-2\cdot1^2)\cdot\varphi''(1)=0, \qquad \therefore \varphi''(1)=0〃$$

(1)も同様 省略.

Date

p.106 5

(2) y を x の関数と考えて両辺 x で微分すると

$$x^2 - xy + y^3 = 7 \quad \cdots ⓪$$

$$2x - y - xy' + 3y^2 y' = 2x - y - (x - 3y^2)y' = 0 \quad \cdots ①$$

$$2 - y' - (1 - 6yy')\cdot y' - (x - 3y^2)y'' = 0 \quad \cdots ②$$

① より $y' = 0 \Rightarrow y = 2x$. これを ⓪ に代入すれば

$$x^2 - 2x^2 + 8x^3 = 7. \qquad 8x^3 - x^2 - 7 = (x-1)(8x^2+7x+7) = 0$$

$8x^2+7x+7 > 0$ より $x = 1\ (y = 2)$ となる. 又 ② より $2 - 0 - 0 - (1-12)\cdot y'' = 0$, $y'' = -2/11 < 0$
だから ⓪ の定める陰関数 $\varphi(x)$ は $x = 1$ に於いて極大値 $\varphi(1) = 2$ を持つ.

同様なので (1) は省略

p.106 6

(2) $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1$, $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ とし $g(x,y) = 0$ の定める陰関数を
$\varphi(x)$ と置く. 更に $p(x) = f(x, \varphi(x))$ とする

i) 極値の候補を探す

$$F_x = y - 2\lambda x, \quad F_y = x - 4\lambda y, \quad F_\lambda = x^2 + 2y^2 - 1\ (= g(x,y))$$

$F_x = F_y = 0$ ならば $y = 2\lambda x$, $x = 4\lambda y$, 従って $(8\lambda^2 - 1)x = 0$ となる. $x = 0$ のとき $y = 0$ と
なるが, $g(0,0) \neq 0$ より $(x,y) = (0,0)$ は対象外である. 故に $\lambda = \pm 1/2\sqrt{2}$, $y = \pm x/\sqrt{2}$ となる.
これを $F_\lambda = 0$ に代入すれば

$$x^2 + 2\cdot\left(\pm\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1 = 2x^2 - 1 = 0. \qquad \therefore (x,y) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}\right)$$

Date . .

ii) 各候補について調べる.

陰関数定理より $\varphi' = -\frac{x}{2y}$, $\varphi'' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{1}{4y^3}$

$$p' = f_x + f_y \cdot y' = y + x\cdot\varphi' = y - \frac{x^2}{2y}$$

$$p'' = f_{xx} + 2\cdot f_{xy}\cdot y' + f_{yy}\cdot y'^2 + f_y\cdot y'' = 2\cdot\varphi' + x\varphi'' = -\frac{x}{y} - \frac{x}{4y^3}$$

$(x,y) = (1/\sqrt{2}, 1/2)$ に於いて $p''(1/\sqrt{2}) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1/2} + \frac{1}{4(1/2)^3}\right) < 0$

〃 $(1/\sqrt{2}, -1/2)$ 〃 $p''(1/\sqrt{2}) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{-1/2} + \frac{1}{4(-1/2)^3}\right) > 0$

$(x,y) = (-1/\sqrt{2}, 1/2)$ に於いて $p''(-1/\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1/2} + \frac{1}{4(1/2)^3}\right) > 0$

〃 $= (-1/\sqrt{2}, -1/2)$ 〃 $p''(-1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}\left(\frac{1}{-1/2} + \frac{1}{4(-1/2)^3}\right) < 0$

これらより $f(x,y)$ は $g(x,y)=0$ の下で $(x,y) = \pm(1/\sqrt{2}, 1/2)$ のとき 極大値 $f(\pm(1/\sqrt{2}, 1/2)) = 1/2\sqrt{2}$〃
$(x,y) = \pm(1/\sqrt{2}, -1/2)$ のとき 極小値 $-1/2\sqrt{2}$〃 をとる事が分かる.

同様なので (1) は省略.

P.106 7.

(2) $g(x,y)=x^2+y^2-1$, $D^\circ=\{(x,y)\mid g(x,y)<0\}$, $C=\{(x,y)\mid g(x,y)=0\}$ とする.

$f_x=2x-1$. $f_y=2y-1$. $f_{xx}=2$, $f_{xy}=0$. $f_{yy}=2$. $\Delta=f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2=4$.

$f_x=f_y=0 \Leftrightarrow (x,y)=(1/2,1/2)$, $\Delta(1/2,1/2)>0$. $f_{xx}(1/2,1/2)>0$ より f は D°内で $(1/2,1/2)$ に於いて 極小値 $f(1/2,1/2)=-1/2$ を持つ.

$F=f-\lambda g$ と置く. $F_x=2x-1-2\lambda x$, $F_y=2y-1-2\lambda y$. $F_\lambda=x^2+y^2-1$ であり.
$F_x=F_y=0$ だとすると $x=y=1/2(1-\lambda)$. これを $F_\lambda=0$ に代入すれば

$$\frac{1}{4(1-\lambda)^2}+\frac{1}{4(1-\lambda)^2}=1,\quad 1-\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\quad x=y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$y=\varphi(x)$ を $g(x,y)=0$ により定まる陰関数, $p(x)=f(x,\varphi(x))$ とすれば

$$\varphi'=-\frac{g_x}{g_y}=-\frac{x}{y}.\qquad \varphi''=-\frac{1}{g_y}\left(g_{xx}+2g_{xy}\cdot\varphi'+g_{yy}\cdot(\varphi')^2\right)=-\frac{x^2+y^2}{y^3}$$

$$p'=f_x+f_y\cdot\varphi'=\frac{x-y}{y}.$$

$$p''=f_{xx}+2f_{xy}\cdot\varphi'+f_{yy}(\varphi')^2+f_y\cdot\varphi''=\frac{x^2+y^2}{y^3}.$$

$p''(\sqrt{2}/2)=(1/2+1/2)/\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=2\sqrt{2}>0$, $p''(-\sqrt{2}/2)=-2\sqrt{2}<0$ より $p(\sqrt{2}/2)$, $p(-\sqrt{2}/2)$ は それぞれ $p(x)$ の 極小値, 極大値, 従って 最小値, 最大値 となる. 故に $f(x,y)$ の C上の 最大値は $p(-\sqrt{2}/2)=f(-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2)=(-\sqrt{2}/2)^2+(-\sqrt{2}/2)^2-(-\sqrt{2}/2)-(-\sqrt{2}/2)=1+\sqrt{2}$, 最小値は $p(\sqrt{2}/2)=f(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)=1-\sqrt{2}$ となる.

D°上の値と C上の値を比較すれば f の D上の最大値は $f(-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2)=1+\sqrt{2}$ //
最小値は $f(1/2,1/2)=-1/2$ // となる.

同様なので (1) は省略.