P.99 1

(1) $\left(2\frac{\partial}{\partial x}+3\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y) = \left(4\frac{\partial^2}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+9\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x,y) = 4f_{xx}(x,y)+12f_{xy}(x,y)+9f_{yy}(x,y)$ //

(2) $\left(2\frac{\partial}{\partial x}+3\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0) = 4\cdot 4e^{2x+y}+12\cdot 2\cdot 1\,e^{2x+y}+9\cdot 1\cdot 1\,e^{2x+y}\Big|_{x=0,y=0} = 49$ //

P.99 2

(1) $z_x = 3x^2y+y^2$, $z_y = x^3+2xy$

$z_{xx} = 6xy$, $z_{xy} = 3x^2+2y$, $z_{yy} = 2x$ //

(2) $z_x = \sin xy + xy\cos xy$, $z_y = x^2\cos xy$

$z_{xx} = y\cos xy + y\cos xy - xy^2\sin xy = 2y\cos xy - xy^2\sin xy$ //

$z_{xy} = x\cos xy + x\cos xy - x^2y\sin xy = 2x\cos xy - x^2y\sin xy$ //

$z_{yy} = -x^3\sin xy$ //

(3) $z_x = 2xy\,e^{x^2y}$, $z_y = x^2e^{x^2y}$

$z_{xx} = 2y\,e^{x^2y}+4x^2y^2e^{x^2y} = 2(y+2x^2y^2)\,e^{x^2y}$ //

$z_{xy} = 2x\,e^{x^2y}+2x^3y\,e^{x^2y} = 2(x+x^3y)\,e^{x^2y}$ //

$z_{yy} = x^4e^{x^2y}$ //

(4) $z_x = \frac{y}{1+x^2y^2}$, $z_y = \frac{x}{1+x^2y^2}$

$z_{xx} = -\frac{y\cdot 2xy^2}{(1+x^2y^2)^2} = -\frac{2xy^3}{(1+x^2y^2)^2}$ //, $z_{yy} = -\frac{2x^3y}{(1+x^2y^2)^2}$ //

$z_{xy} = \frac{1\cdot(1+x^2y^2)-y\cdot 2x^2y}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$ //

(4)のように xとyを入れ替えても式が変わらない場合（"独立変数の対称性"などという），xとyの役割を入れ替えれば他方が自動的に計算できる

例 $z_{xx} = -\frac{2xy^3}{(1+x^2y^2)^2}$ で $x\to y$, $y\to x$ とすれば $z_{yy} = -\frac{2yx^3}{(1+y^2x^2)^2}$ を得る.

Date

P.99 3

(3) $z_x = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $z_y = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$

$z_{xx} = -\frac{(-y)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $z_{yy} = -\frac{x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\therefore\ \Delta z = z_{xx} + z_{yy} = 0$ //

(4) $z_x = 3x^2+y$, $z_y = x+3y^2$

$z_{xx} = 6x$, $z_{y} = 6y$ $\therefore\ \Delta z = z_{xx} + z_{yy} = 6(x+y)$ //

(1)(2)も同様なので省略.

例えば $z=f(x,y)$ が平面上の各点 (x,y) での温度分布を表す関数だとする. 化学反応が終わり熱の拡散が終わって"平衡状態"になると, その温度分布 $z=f(x,y)$ は方程式 $\Delta z=0$ を満たす. この方程式 $\Delta z=0$ は"Laplace方程式"と呼ばれる, 平衡状態を表現する重要な方程式である.

P.99 4

$x_r = \cos\theta$, $y_r = \sin\theta$, $x_\theta = -r\sin\theta$, $y_\theta = r\cos\theta$

$x_{rr} = 0$, $x_{r\theta} = x_{\theta r} = -\sin\theta$, $x_{\theta\theta} = -r\cos\theta$

$y_{rr} = 0$, $y_{r\theta} = y_{\theta r} = \cos\theta$, $y_{\theta\theta} = -r\sin\theta$

$z_r = z_x\cdot x_r + z_y\cdot y_r = z_x\cos\theta + z_y\sin\theta$

$z_{rr} = (z_x\cdot x_r)_r + (z_y\cdot y_r)_r$

$= (z_x)_r\cdot x_r + z_x\cdot x_{rr} + (z_y)_r\cdot y_r + z_y\cdot y_{rr}$ (p.27 定理2.1.3 (3))

$= ((z_x)_x\cdot x_r + (z_x)_y\cdot y_r)\cdot x_r + ((z_y)_x\cdot x_r + (z_y)_y\cdot y_r)\cdot y_r + z_x\cdot x_{rr} + z_y\cdot y_{rr}$

(z_x, z_y に定理4.2.5を適用)

$= z_{xx}\cdot x_r^2 + 2z_{xy}\cdot x_r y_r + z_{yy}\cdot y_r^2 + z_x\cdot x_{rr} + z_y\cdot y_{rr}$ … ①

$= z_{xx}\cos^2\theta + 2z_{xy}\cos\theta\sin\theta + z_{yy}\sin^2\theta$

① で r を θ で置き換えて

$z_{\theta\theta} = z_{xx}\cdot x_\theta^2 + 2z_{xy}\,x_\theta y_\theta + z_{yy}\cdot y_\theta^2 + z_x\cdot x_{\theta\theta} + z_y\cdot y_{\theta\theta}$

$= z_{xx}\cdot r^2\sin^2\theta - 2z_{xy}\,r^2\sin\theta\cos\theta + z_{yy}\,r^2\cos^2\theta - z_x\cdot r\cos\theta - z_y\,r\sin\theta$

Date . .

P.99 4 (つづき)

$\therefore\ z_{rr}+\frac{1}{r}z_r+\frac{1}{r^2}z_{\theta\theta}$

$$= z_{xx}\cdot\cos^2\theta + 2z_{xy}\cos\theta\sin\theta + z_{yy}\sin^2\theta + \frac{1}{r}(z_x\cos\theta+z_y\sin\theta)$$
$$+ z_{xx}\cdot\sin^2\theta - 2z_{xy}\sin\theta\cos\theta + z_{yy}\cos^2\theta - \frac{1}{r}(z_x\cos\theta+z_y\sin\theta)$$
$$= z_{xx}(\cos^2\theta+\sin^2\theta) + z_{yy}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$= z_{xx}+z_{yy}$$

$$\therefore\ z_{xx}+z_{yy} = z_{rr}+\frac{1}{r}z_r+\frac{1}{r^2}z_{\theta\theta}\ //$$

P.99 5

(2) $f_x=-\sin(x+2y)$, $f_y=-2\sin(x+2y)$

$f_{xx}=-\cos(x+2y)$, $f_{xy}=-2\cos(x+2y)$, $f_{yy}=-4\cos(x+2y)$

$\partial_x=\frac{\partial}{\partial x},\ \partial_y=\frac{\partial}{\partial y}$ と置く. $f(0,0)=1$ 及び

$$(h\partial_x+k\partial_y)f(0,0) = h\cdot(-\sin(x+2y))\Big|_{(x,y)=(0,0)} + k\cdot(-2\sin(x+2y))\Big|_{(x,y)=(0,0)} = 0$$

$$(h\partial_x+k\partial_y)^2 f(\theta h,\theta k) = h^2 f_{xx}(\theta h,\theta k)+2hk f_{xy}(\theta h,\theta k)+k^2 f_{yy}(\theta h,\theta k)$$
$$= h^2(-\cos\theta(h+2k))+2hk(-2\cos\theta(h+2k))+k^2(-4\cos\theta(h+2k))$$
$$= -(h^2+4hk+4k^2)\cos\theta(h+2k)$$

より Maclaurin の定理から

$$f(h,k) = f(0,0)+\frac{1}{1!}(h\partial_x+k\partial_y)f(0,0)+\frac{1}{2!}(h\partial_x+k\partial_y)^2 f(\theta h,\theta k)$$
$$= 1+\frac{1}{1!}\cdot 0+\frac{1}{2!}\cdot\{-(h^2+4hk+4k^2)\cos\theta(h+2k)\}$$

$$\therefore\ \cos(h+2k) = 1-\frac{1}{2}(h+2k)^2\cos\theta(h+2k)\ //\qquad (0<\theta<1)$$

(1) も同様.

Date

P.99 6.

(1) $f_x = e^{x+y}$, $f_y = e^{x+y}$. $f_x(0,0), f_y(0,0) = 1 \neq 0$ より (0,0) は極値ではない。

(4) $f_x = 4x^3 - 2x + 2y$, $f_y = 4y^3 + 2x - 2y$

$f_{xx} = 12x^2 - 2$, $f_{xy} = 2$, $f_{yy} = 12y^2 - 2$

$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 4\{(6x^2-1)(6y^2-1) - 1\}$

$(x,y) = (1,-1)$ について $f_x(1,-1) = 4-2-2 = 0$, $f_y(1,-1) = -4+2+2 = 0$,

及び $\Delta(1,-1) = 4\{(6\cdot1^2-1)(6\cdot(-1)^2-1) - 1\} > 0$ より $f(1,-1)$ は極値であり、

$f_{xx}(1,-1) = 12\cdot1^2 - 2 > 0$ より $f(1,-1)$ は極小値である。

(2),(3) も同様。

P.99 7

(1) $f_x = 2x + y$, $f_y = x + 4y - 4$

$f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 4$. $\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 8 - 1 (>0)$

$f_x = f_y = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (-\frac{4}{7}, \frac{8}{7})$, $\Delta(-\frac{4}{7}, \frac{8}{7}) = 7 > 0$, $f_{xx}(-\frac{4}{7}, \frac{8}{7}) = 2 > 0$

より $f(x,y)$ は極小値 $f(-\frac{4}{7}, \frac{8}{7}) = \frac{16}{49} - \frac{32}{49} + 2\cdot\frac{64}{49} - 4\cdot\frac{8}{7} = -\frac{112}{49} = -\frac{16}{7}$ を得る。

(2) $f_x = 3x^2 + 2y - 1$, $f_y = 2x - 2$, $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = 2$, $f_{yy} = 0$, $\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = -4$

このΔの計算結果より 何如なる $f(x,y)$ も極値には成り得ない。よって 極値はない。

(3) $f_x = 3x^2 + 2x + 2y$, $f_y = 3y^2 + 2x + 2y$

$f_{xx} = 6x + 2$, $f_{xy} = 2$, $f_{yy} = 6y + 2$

$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 2^2 \cdot \{(3x+1)(3y+1) - 1\}$

$f_x = f_y = 0$ のとき $(3x^2+2x+2y) - (3y^2+2x+2y) = 3(x^2 - y^2) = 0$ より $x = \pm y$

Date . .

P.99 7 (つづき)

(3) (つづき)

$x=y$ のとき $3x^2+2x+2x = x(3x+4)=0$. $\therefore (x,y)=(0,0), (-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$

$x=-y$ のとき $3x^2+2x+2(-x) = 3x^2=0$ $\therefore (x,y)=(0,0)$

よって $(x,y)=(0,0)$ 及び $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ が極値の候補となる

$f(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ について: $\Delta(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) = 4\{(3\cdot(-\frac{4}{3})+1)\cdot(3\cdot(-\frac{4}{3})+1)-1\} = 4(11^2-1)>0$

$f_{xx}(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) = 6\cdot(-\frac{4}{3})+2 = -6<0$ より $f(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ は極大値となる.

$f(0,0)$ について: $\Delta(0,0) = 4\cdot(1^2-1^2)=0$ より、この値だけでは極値かどうか判定できない. そこで元の式について $y=-x$ とする. すると

$$f(x,y) = x^3+y^3+(x+y)^2 = x^3+(-x)^3+0^2 = 0$$

すなわち 直線 $y=-x$ 上では $f(x,y)=0$ という一定値であり, 従って $f(0,0)$ は極値ではない.

以上より f は 極大値 $f(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) = \frac{64}{27}$ を持つ.

(4), (5) も同様.