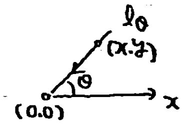
P.90. 1

i) 連続性.　$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と置くとき. $(x,y)\neq(0,0)$ $(r\neq 0)$ について

$$f(x,y)=\frac{2r^2\cos\theta\cdot\sin\theta}{r^2}=\sin 2\theta$$



より (x,y) を半直線 l_θ に沿って近づけるとき(右図参照).
θ毎に極限値は異なる. 従って $(x,y)\to(0,0)$ のときの $f(x,y)$ の極限は存在せず, 従って $(x,y)=(0,0)$ で $f(x,y)$ は不連続である.

偏微分可能性.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(f(x,0)-f(0,0)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{0}{x^2}-0\right)=0$$

より $f(x,y)$ は xに関し偏微分可能, かつ偏微分係数は 0 である. yに関しても同様.

全微分可能性.　$(0,0)$ で全微分可能だとすれば定理4.2.1より

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left\{\frac{2hk}{h^2+k^2}-(0\cdot h+0\cdot k)\right\}=0$$

でなければならない. しかし $h=r\cos\theta$, $k=r\sin\theta$ と置くと

$$\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left\{\frac{2hk}{h^2+k^2}-(0\cdot h+0\cdot k)\right\}=\frac{2r^2\cos\theta\cdot\sin\theta}{r^3}\longrightarrow\pm\infty\quad(r\to 0+0)$$

だから $f(x,y)$ は $(0,0)$ で全微分可能ではない.

(別解: 定理4.2.3. と上の $(0,0)$ に於ける $f(x,y)$ の不連続性より $f(x,y)$ は $(0,0)$ で全微分可能ではない.)

P.90. 2　接平面の方程式　$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$.

$$\Leftrightarrow \quad f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$$

より 法線ベクトルは $(f_x(a,b), f_y(a,b), -1)$ により与えられる. 従って法線上の点は パラメーター t を用いて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ f(a,b) \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \\ -1 \end{bmatrix}$$

と表わされる. ここで t を消去すれば, 例えば $f_x(a,b), f_y(a,b) \neq 0$ ならば

$$\frac{x-a}{f_x(a,b)} = \frac{y-b}{f_y(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1} \,/\!/$$

$f_x(a,b) = 0$, $f_y(a,b) \neq 0$ ならば　$z - f(a,b) = -\dfrac{y-b}{f_y(a,b)}$, $x = a$ //

$f_x(a,b) \neq 0$, $f_y(a,b) = 0$ ならば　$z - f(a,b) = -\dfrac{x-a}{f_x(a,b)}$, $y = b$ //

P.90 3. (4)　$z_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $z_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ より

$$z = -\frac{-1}{1^2+(-1)^2}(x-1) + \frac{1}{1^2+(-1)^2}(x+1) + \left(-\frac{\pi}{4}\right). \qquad \therefore \; x + y - 2z - \frac{\pi}{2} = 0 \,/\!/$$

$$\frac{x-1}{-\frac{-1}{1^2+(-1)^2}} = \frac{y+1}{\frac{1}{1^2+(-1)^2}} = \frac{z+\frac{\pi}{4}}{-1} \qquad \therefore \; x-1 = y+1 = -\frac{z+\frac{\pi}{4}}{2} \,/\!/$$

(1)〜(3) も同様.

Date . . No.

P.90 4.

(2) $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{y}{1+(xy)^2}\cdot(e^t - e^{-t}) + \frac{x}{1+(xy)^2}\cdot 2e^{2t}$

$= \frac{1}{1+((e^t+e^{-t})\cdot e^{2t})^2}\cdot\left(e^{2t}(e^t - e^{-t}) + (e^t+e^{-t})\cdot 2e^{2t}\right) = \frac{3e^{3t}+e^t}{1+e^{2t}+2e^{4t}+e^{6t}}$ //

(1).(3)(4) も同様. 省略.

P.90 5.

(2) $z_u = z_x\cdot x_u + z_y\cdot y_u = \cos(x-y)\cdot 2u - \cos(x-y)\cdot 2v$

$z_v = z_x\cdot x_v + z_y\cdot y_v = \cos(x-y)\cdot 2v - \cos(x-y)\cdot 2u$

$x-y = u^2+v^2-2uv = (u-v)^2$ より $z_u = 2(u-v)\cos(u-v)^2$ // $z_v = 2(v-u)\cos(u-v)^2$ //

(4) $z_u = z_x\cdot x_u + z_y\cdot y_u = -\sin(u+v)\cdot z_x + \cos(u-v)\, z_y$ //

$z_v = z_x\cdot x_v + z_y\cdot y_v = -\sin(u+v)\cdot z_x - \cos(u-v)\, z_y$ //

※ f は具体的に与えられない限り. これ以上計算できないので このまま放置する.

(5) $z = f(t)$ $(t = x+3y)$ とし, t に関する微分を $f'(t)$ と記す.

$z_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = f'(t) = f'(x+3y)$

$z_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = f'(t)\cdot 3 = 3f'(x+3y)$

$z_u = z_x\cdot x_u + z_y\cdot y_u = f'(x+3y)\cdot 1 + 3f'(x+3y)\cdot 3 = 10\cdot f'(10u-14v)$ //

$z_v = z_x\cdot x_v + z_y\cdot y_v = f'(x+3y)\cdot(-2) + 3\cdot f'(x+3y)\cdot(-4) = -14f'(10u-14v)$ //

他も同様. 省略.

P.90 6

$x_u = \cos\alpha$. $x_v = -\sin\alpha$, $y_u = \sin\alpha$. $y_v = \cos\alpha$ より

$$z_u = x_u z_x + y_u z_y = \cos\alpha\, z_x + \sin\alpha\, z_y$$
$$z_v = x_v z_x + y_v z_y = -\sin\alpha\, z_x + \cos\alpha\, z_y$$

$$z_u^2 + z_v^2 = \cos^2\alpha\, z_x^2 + 2\sin\alpha\cos\alpha\, z_x z_y + \sin^2\alpha\, z_y^2 + \sin^2\alpha\, z_x^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha\, z_x z_y + \cos^2\alpha\, z_y^2 = z_x^2 + z_y^2. \,//$$

P.91 7

(1) $x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \frac{1}{2}(u-v)$ より $x_u = \frac{1}{2}$. $x_v = \frac{1}{2}$. $y_u = \frac{1}{2}$. $y_v = -\frac{1}{2}$.

$$z_u = x_u z_x + y_u z_y = \frac{1}{2} f_x + \frac{1}{2} f_y \,// \qquad z_v = x_v z_x + y_v z_y = \frac{1}{2} z_x - \frac{1}{2} z_y \,//$$

(2) $z = g(x+y)$ と表わされるとき, $z_x = t_x \cdot \dot{g} = \dot{g}$, $z_y = t_y \cdot \dot{g} = \dot{g}$ ($\dot{}$ は t に関する微分)
だから $z_x = z_y$ が成立.

$z_x = z_y$ だとする. $u = x+y$. $v = x-y$ と置けば (1) より $z_v = \frac{1}{2}(z_x - z_y) = 0$.
これは z を u, v の関数と考えたとき, z は v に関して一定値である事, 従て u にのみ従属する関数である事を意味する. 故に z は 1変数関数 g を用いて $z = g(u)$ と表わされる. ここで $u = x+y$ とすれば $z = g(x+y)$ と表わされる.

P.91 8 は 7と同様. 特に $z = g(r)$ と表わされるという事は 原点を中心に回転させても. zの値は変わらない(回転不変)である事を意味する.

P.91. 9

(2) $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)} = \begin{bmatrix} x_r & x_t \\ y_r & y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh t & r\sinh t \\ \sinh t & r\cosh t \end{bmatrix}$$

$$\therefore \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)} \right| = r\cosh^2 t - r\sinh^2 t = r \,/\!/$$

教科書では $\begin{vmatrix} x_r & x_t \\ y_r & y_t \end{vmatrix}$（行列式）を $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)}$ と表したが，ここでは $\begin{bmatrix} x_r & x_t \\ y_r & y_t \end{bmatrix}$（行列）を $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)}$ とし，その行列式を $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)}\right|$ と表した．以下のこの解答では後者の規約に従う．

(1), (3)(4) も同様なので省略．

P.91. 10

(1) $$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{bmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| = \cos\theta\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}$$
$$+(-r\sin\theta)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}$$

（第3行に関する余因子展開）

$$= \cos\theta\cdot r^2\cos\theta\sin\theta\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} + r\sin\theta\cdot r\sin^2\theta\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\cdot\sin\theta = r^2\sin\theta \,/\!/$$

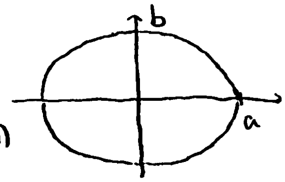
(2) も同様なので省略．

P.91. 11.

(3) 長軸 a, 短軸 b の楕円の面積 S は $S=\pi ab$ により与えられる. a, b を $\Delta a, \Delta b$ だけ変化させたときの面積 S の変化率 ΔS の一次近似は

$$\Delta S \fallingdotseq S_a\cdot\Delta a + S_b\Delta b = \pi b\cdot\Delta a + \pi a\cdot\Delta b$$

により与えられる(右図参照).



今 $a=1\,(m)$, $b=0.5\,(m)$, $\Delta a=0.005\,(m)$, $\Delta b=-0.005\,(m)$ とすれば ΔS の一次近似は

$$\Delta S = \pi\cdot 0.5\times 0.005 + \pi\cdot 1\times(-0.005) = -25\times 10^{-2}\pi\ (m^2) = -25\pi\ (cm^2).//$$

(1), (2) は (3) の前半と同様なので省略.

P.91. 12*

(1) $z_x = (x+2y)_x = 1$ //

(2) $z = -x+2(x+y) = -x+2u$ より $z_x = (-x+2u)_x = -1$ //