P.84 1.

(1) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と置く。このとき $(x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow r\to 0$ となる。

$$\frac{x^2y}{x^2+y^2} = \frac{r^2\cos^2\theta\cdot r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = r\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} r\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta = 0 \,/\!/$$

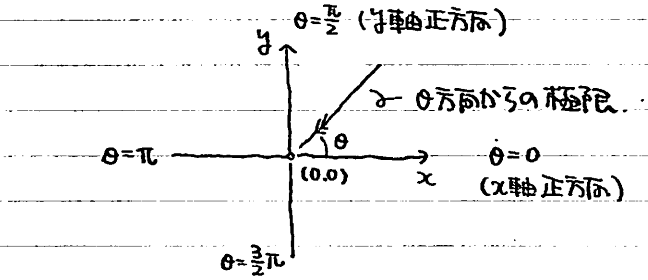
(2) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と置換する。

$$(\text{与式}) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2(\cos^2\theta-2\sin^2\theta)}{r^2}$$

$\theta=0$のとき $\cos^2\theta-2\sin^2\theta = 1$ より x軸上正の方向からの極限は 1

$\theta=\frac{\pi}{2}$のとき $\cos^2\theta-2\sin^2\theta = -2$ より y軸上正の方向からの極限は -2

これより方向により極限値が異なるので与式の極限は<u>存在しない</u>。



(3) $y=0$のとき $(\text{与式}) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$　$x=0$のとき $(\text{与式}) = \lim_{y\to 0}\frac{2y^2}{y^2} = 2$

これらより近づく方向により極限値が異なる事が分かる。従って(与式)の極限は<u>存在しない</u>。

※ (2)のように極座標を使って極限値がθ毎に異なる事を示してもよい。

No.

Date

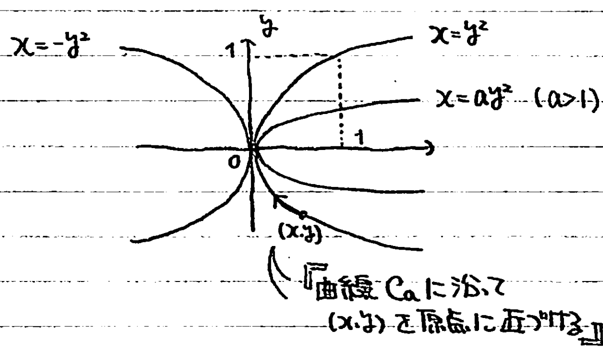
P.84 1 (続き)

(4) (5) は (1) と同様なので省略.

(6) 曲線 C_a: $x = ay^2$ に沿って (x, y) を原点に近づけると

$$\frac{xy^2}{x^2+y^4} = \frac{a \cdot y^2 \cdot y^4}{a^2y^4+y^4} = \frac{a \cdot y^4}{(a^2+1)y^4} \longrightarrow \frac{a}{a^2+1} \quad ((x,y)\to(0,0),\ (x,y)\in C_a)$$

従って a によって極限値が異なる. 故に与式の極限は存在しない.



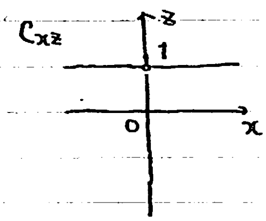
No.

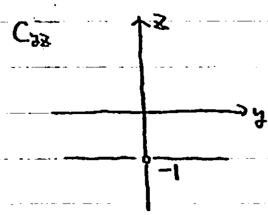
Date . .

P.84. 2.

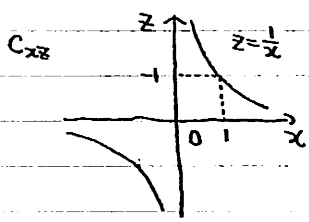
関数 $z=f(x,y)$ のグラフ $C:(x,y,f(x,y))$ と xz平面（3次元空間内で $y=0$ により定義される面）との共通部分（切り口, 断面, 切断面, etc）のグラフ C_{xz} は $C_{xz}:(x,0,f(x,0))$ により与えられる. yz平面（$x=0$で定義される面）との共通部分のグラフ C_{yz} についても同様.

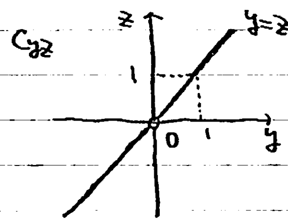
(1) $f(x,0)=1 \ (x\neq0)$, $f(0,y)=-1 \ (y\neq0)$ より xz平面, yz平面による切口のグラフ C_{xz}, C_{yz} はそれぞれ次の通り:





(2) $f(x,0)=\frac{1}{x} \ (x\neq0)$, $f(0,y)=y \ (y\neq0)$ より xz平面, yz平面による切口のグラフ C_{xz}, C_{yz} はそれぞれ次の通り:





PLUS

No.
Date

P.84 3

(1) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と置換すると $(x,y)\neq(0,0)$ のとき

$$f(x,y)=\frac{r^3\cos^3\theta+r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)$$

だから $r\to 0$ ($\Leftrightarrow (x,y)\to(0,0)$) のとき $f(x,y)\to 0=f(0,0)$. 従って $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ に於いて連続である.

(2) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と置換すると $(x,y)\neq(0,0)$ のとき

$$f(x,y)=\frac{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta+2\sin^2\theta)}=\frac{1}{1+\sin^2\theta}$$

だから. 例えば $\theta=0,\ \frac{\pi}{2}$ のときの値を比較すれば 極限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ は存在せず. 従って $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ に於いて不連続となる.

(3) $(x,y)\neq(0,0)$ のとき $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と置換すると

$$\left|\frac{x^4+x^2+y^2+y^3}{x^2+y^2}-1\right|=\frac{|x^4+y^3|}{x^2+y^2}=|r(r\cos^4\theta+\sin^3\theta)|$$

$(x,y)\to(0,0)$, すなわち $r\to 0$ とすれば (右辺) $\to 0$ だから

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+x^2+y^2+y^3}{x^2+y^2}=1=f(0,0)$$ $\therefore$ $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続.

P.84 4

(1) 〜 (6) 容易なので省略.

(7) $z = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ $\quad z_x = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x = \frac{x}{x^2+y^2}$ 〃

x と y の対称性 ($f(x,y) = f(y,x)$ の事) より $\quad z_y = \frac{y}{x^2+y^2}$ 〃

(8) $z_x = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$ 〃 $\quad z_y = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$ 〃

(9) $w_x = 2xy^3z^2$ 〃 $\quad w_y = 3x^2y^2z^2$ 〃 $\quad w_z = 2x^2y^3z$ 〃

(10) $w_x = \frac{1}{\sqrt{1-(x+yz)^2}}\cdot(x+yz)_x = \frac{1}{\sqrt{1-(x+yz)^2}}$ 〃 $\quad w_y = \frac{z}{\sqrt{1-(x+yz)^2}}$ 〃

変数 y, z に関する対称性より $\quad w_z = \frac{y}{\sqrt{1-(x+yz)^2}}$ 〃

P.84 5

(1) $z_x = 3x^2y^3$, $z_y = 3x^3y^2$ より $\quad xz_x + yz_y = 3x^3y^3 + 3x^3y^3 = 6x^3y^3$.

故に $xz_x + yz_y = 6z$. ▨

(2) $w = f(x,y,z)$ と置けば 独立変数に関して $f(x,y,z) = f(y,z,x) = f(z,x,y)$

という対称性がある事が容易に確められる. x に関する偏導関数の計算

$$
\begin{aligned}
w_x = f_x(x,y,z) &= (x-y)_x\cdot(y-z)\cdot(z-x) + (x-y)\cdot(y-z)_x\cdot(z-x) + (x-y)\cdot(y-z)\cdot(z-x)_x \\
&= 1\cdot(y-z)\cdot(z-x) + (x-y)\cdot 0\cdot(z-x) + (x-y)\cdot(y-z)\cdot(-1) \\
&= (y-z)(z-x-x+y) = (y-z)(y+z-2x)
\end{aligned}
$$

と上の対称性より $\quad w_y = (z-x)(z+x-2y)$, $\quad w_z = (x-y)(x+y-2z)$ となる.

$$
\begin{aligned}
w_x + w_y + w_z = &\ y^2 - z^2 - 2xy + 2zx \\
&+ z^2 - x^2 - 2yz + 2xy \\
&+ x^2 - y^2 - 2zx + 2yz.
\end{aligned}
$$

$\therefore\ w_x + w_y + w_z = 0.$

▨