Date . .

P.206

B1

(1) $y' = a \cdot e^x - 1$ $\quad \therefore\ y' - y = ae^x - 1 - (ae^x - x - 1) = x$ $\quad \therefore\ y' - y = x$ //

(2) $y' = ae^x + 2be^{2x},\quad y'' = ae^x + 4be^{2x}$

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= ae^x + 4be^{2x} - 3(ae^x + 2be^{2x}) + 2(ae^x + be^{2x}) \\ &= (a - 3a + 2a)e^x + (4b - 6b + 2b)e^{2x} \end{aligned}$$

$\therefore\ y'' - 3y' + 2y = 0$ //

(3) $x^2 + y^2 = a^2$ の両辺をxで微分して $2x + 2y \cdot y' = 0.$ $\quad \therefore\ y \cdot y' + x = 0$ //

(4) $y' = -\dfrac{(2x^2 + a)'}{(2x^2 + a)^2} = -\dfrac{4x}{(2x^2 + a)^2}$ $\quad \therefore\ y' = -4xy^2$ //

Date . .

P.210

B1 (1) $\frac{dy}{dx} = xy$ $\quad \frac{1}{y}dy = x\,dx$, $\int \frac{1}{y}dy = \log|y|$, $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$ より

$\log|y| = \frac{1}{2}x^2 + C_1$ (C_1は定数). $\quad |y| = e^{\log|y|} = e^{\frac{1}{2}x^2+C_1} = e^{C_1}\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

$\therefore\ y = \pm e^{C_1}\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ $\quad C = \pm e^{C_1}$ と置けば $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$ (Cは定数) //

※ $e^A = B \Leftrightarrow \log B = A$ より $e^{\log B} = e^A = B$ //

(2) $(1+x^2)\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$. $\quad y\,dy = \frac{x}{1+x^2}$.

$\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2$, $\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

$\therefore\ \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C_1$ $\quad C = 2C_1$ と置けば $y^2 = \log(1+x^2) + C$ (Cは定数) //

(3) $x\frac{dy}{dx} = y-1$. $\quad \frac{1}{y-1}dy = \frac{1}{x}dx$. $\quad \int\frac{1}{y-1}dy = \log|y-1|$ $\quad \int\frac{1}{x}dx = \log|x|$

$\therefore\ \log|y-1| = \log|x| + C_1$ $\quad |y-1| = e^{\log|y-1|} = e^{\log|x|+C_1} = e^{C_1}|x|$

$\therefore\ y-1 = \pm e^{C_1}x$ $\quad C = \pm e^{C_1}$ と置けば $y = Cx+1$ (Cは定数) //

(4) $x(y-1)\frac{dy}{dx} = y$ $\quad \frac{y-1}{y}dy = \frac{1}{x}dx$

$\int\frac{y-1}{y}dy = \int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy = y - \log|y|$, $\quad \int\frac{1}{x}dx = \log|x|$

$\therefore\ y - \log|y| = \log|x| + C_1$ $\quad y = \log|xy| + C_1$ $\quad e^y = e^{C_1}\cdot e^{\log|xy|} = \pm e^{C_1}xy$

$C = \pm e^{C_1}$ と置けば $e^y = Cxy$ (Cは定数) //

(5) $\cos^3 x \cdot \sec^2 y \dfrac{dy}{dx} + 2\sin x = 0.$　　$\sec^2 y\, dy = -2\sin x \cdot \dfrac{1}{\cos^3 x}$

$\int \sec^2 y\, dy = \tan y.$

$\int \left(-2\sin x \cdot \dfrac{1}{\cos^3 x}\right) dx = \int 2 \cdot t^{-3}\, dt$　　($t = \cos x$ と置く.　$dt = -\sin x \cdot dx$)

$= 2 \cdot \dfrac{1}{-3+1} t^{-3+1} = -t^{-2} = -\sec^2 x$

$\therefore$　$\tan y = -\sec^2 x + C.$　　$\tan y + \sec^2 x = C$　(Cは定数)//

(6) $\sqrt{1+x} \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1+y}.$

$y \neq -1$ のとき　$(1+y)^{-\frac{1}{2}} dy = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$

$\int (1+y)^{-\frac{1}{2}} dy = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}+1} (1+y)^{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{1+y}.$　　$\int (1+x)^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{1+x}$

$\therefore$　$2\sqrt{1+y} = 2\sqrt{1+x} + C_1$　　$C = \dfrac{C_1}{2}$ と置いて　$\sqrt{1+y} = \sqrt{1+x} + C$　(Cは定数)//

定数関数 $y=-1$ も解(特異解)になる事が分かる.

※ 定数Cを含む解を"一般解"といい, Cに数値を代入して得られる解を"特殊解"という. またCにどのような数値を代入しても得られない解を"特異解"という.　□

Date . .

B2

(1) $\frac{dy}{dx} - xy = x$. $\frac{dy}{dx} = x(y+1)$. $\frac{1}{y+1}dy = xdx$

$\int \frac{dy}{y+1} = \log|y+1|$. $\int x dx = \frac{1}{2}x^2$ $\therefore$ $\log|y+1| = \frac{1}{2}x^2 + C_1$ (C_1は定数)

$|y+1| = e^{\log|y+1|} = e^{\frac{1}{2}x^2+C_1}$. $C = \pm e^{C_1}$と置けば $y+1 = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ (Cは定数)

$x=0$のとき $y=3$ だから $3+1 = C \cdot e^0 = C$ $\therefore C=4$. $\therefore$ $y = 4e^{\frac{1}{2}x^2} - 1$ //

(2) $xy^2\frac{dy}{dx} - x + 1 = 0$. $y^2dy = \frac{x-1}{x}dx = \left(1-\frac{1}{x}\right)dx$

$\int y^2 dy = \frac{1}{3}y^3$. $\int\left(1-\frac{1}{x}\right)dx = x - \log|x|$ $\therefore$ $\frac{1}{3}y^3 = x - \log|x| + C$ (Cは定数)

$x=1$のとき $y=3$ だから $9 = 1 - \log|1| + C$. $C=8$ $\therefore$ $y^3 = 3x - 3\log|x| + 24$ //

Date . .

P.213

B1

(1) $xy' + y = x\log x$, $y' + \frac{1}{x}y = \log x$

$P(x) = \int \frac{1}{x}dx = \log x$. $e^{P(x)} = e^{\log x} = x$. $e^{-P(x)} = e^{-\log x} = (e^{\log x})^{-1} = x^{-1}$

$\therefore\ y = e^{-P(x)}\left(\int e^{P(x)}\log x\,dx + C\right)$ (Cは定数)

$= x^{-1}\left(\int x\log x\,dx + C\right) = x^{-1}\left(\frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx + C\right)$ ($\because$ 部分積分)

$= x^{-1}\left(\frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{4}x^2 + C\right)$

$\therefore\ y = \frac{x}{4}(2\log x - 1) + \frac{C}{x}$ (Cは定数)

(別解) $xy' + y = x\log x$ $(xy)' = x\log x$

$\therefore\ xy = \int x\log x\,dx + C = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + C$ $\therefore\ y = \frac{x}{2}\log x - \frac{x}{4} + \frac{C}{x}$ (Cは定数) //

(2) $y' - xy = 2x$

$P(x) = \int(-x)dx = -\frac{1}{2}x^2$. $e^{P(x)} = e^{-\frac{1}{2}x^2}$. $e^{-P(x)} = e^{\frac{1}{2}x^2}$

$\therefore\ y = e^{\frac{1}{2}x^2}\left(\int e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot 2x\,dx + C\right)$ $\left(\begin{array}{l} t = x^2 \text{と置く.} \\ dt = 2x\,dx \end{array}\right)$

$= e^{\frac{1}{2}t}\left(\int e^{-\frac{1}{2}t}dt + C\right) = e^{\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{t}{2}} + C\right)$

$= e^{\frac{t}{2}}(-2e^{-\frac{t}{2}} + C) = -2 + Ce^{\frac{t}{2}}$

$\therefore\ y = -2 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$ (Cは定数)

(別解) $\frac{dy}{dx} = (y+2)x$. $\frac{1}{y+2}dy = x\,dx$ $\log|y+2| = \frac{1}{2}x^2 + C_1$

$y+2 = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$ ($C = \pm e^{C_1}$ と置く) $\therefore\ y = -2 + Ce^{\frac{1}{2}x^2}$ (Cは定数) //

Date

(3) $y' - \frac{y}{x} = x^3$ $\quad P(x) = -\log x$. $\quad e^{P(x)} = x^{-1}$. $\quad e^{-P(x)} = x$

$\therefore \quad y = x\left(\int x^{-1} \cdot x^3 \, dx + C\right) = x\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right) = \frac{x^4}{3} + Cx$ （Cは定数）//

(4) $y' - 3y = e^{-x}$ $\quad P(x) = -3x$ $\quad e^{P(x)} = e^{-3x}$. $\quad e^{-P(x)} = e^{3x}$

$\therefore \quad y = e^{3x}\left(\int e^{-3x} \cdot e^{-x} \, dx + C\right) = e^{3x}\left(\frac{1}{-4}e^{-4x} + C\right) = Ce^{3x} - \frac{1}{4}e^{-x}$ （Cは定数）//

(5) $xy' + 2y = \sin x$. $\quad y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin x}{x}$

$P(x) = 2\log x$. $\quad e^{P(x)} = e^{2\log x} = e^{\log x^2} = x^2$. $\quad e^{-P(x)} = x^{-2}$

$\therefore \quad y = x^{-2}\left(\int x^2 \cdot \frac{\sin x}{x} \, dx + C\right) = x^{-2}\left(\int x \sin x \, dx + C\right)$

$= x^{-2}\left(-x\cos x + \int \cos x \, dx + C\right) = x^{-2}\left(-x\cos x + \sin x + C\right)$ （Cは定数）//

(6) $y' \sin x - y\cos x = \tan^2 x$. $\quad y' - \frac{\cos x}{\sin x}y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

$P(x) = \int\left(-\frac{\cos x}{\sin x}\right)dx = -\log \sin x$. $\quad e^{P(x)} = (\sin x)^{-1}$. $\quad e^{-P(x)} = \sin x$

$\therefore \quad y = \sin x\left(\int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx + C\right) = \sin x\left(\int \frac{1}{\cos^2 x} dx + C\right)$

$= \sin x\left(\tan x + C\right)$ （Cは定数）//

Date

P.218

B1. (1) 特性方程式 $t^2+3t-4=0$ の解は $t=1, -4$ だから、一般解は
$y=C_1e^x+C_2e^{-4x}$ (C_1, C_2は任意定数)

(2) 特性方程式 $t^2-2t+2=0$ の解は $t=1\pm i$ だから、一般解は $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$ (C_1, C_2は任意定数)

(3) 特性方程式 $t^2-10t+25=0$ の解は $t=5$(重解) だから 一般解は $y=e^{5x}(C_1+C_2x)$ (C_1, C_2は任意定数)

(4) 特性方程式 $t^2-4t+13=0$ の解は $t=2\pm 3i$ だから、一般解は $y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$ (C_1, C_2は任意定数)

(5) $8t^2-2t-1=(4t+1)(2t-1)=0$, $t=-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ $\therefore y=C_1e^{-\frac{x}{4}}+C_2e^{\frac{x}{2}}$ (C_1, C_2は任意定数)

(6) $t^2+a^2=t^2-(ai)^2=(t-ai)(t+ai)=0$. $t=\pm ai$ $\therefore y=C_1\cos ax+C_2\sin ax$ (C_1, C_2は任意定数)

(7) $t^2-a^2=(t-a)(t+a)=0$, $t=\pm a$ $\therefore y=C_1e^{at}+C_2e^{-at}$ (C_1, C_2は任意定数)

(8) $t^2-at=t(t-a)=0$, $t=0, a$ $\therefore y=C_1+C_2e^{at}$ (C_1, C_2は任意定数)

Date . .

p. 223

B1. (1) $y = A\cos x + B\sin x$ (A, Bは定数) という形の特殊解の存在が予想される.

$$y'' + y' - 2y = (-A\cos x - B\sin x) + (-A\sin x + B\cos x) - 2(A\cos x + B\sin x)$$
$$= (-3A + B)\cos x + (-A - 3B)\sin x$$
$$= 10\cos x$$

より $-3A + B = 10$, $-A - 3B = 0$, $A = -3$, $B = 1$. したがって $y = -3\cos x + \sin x$ という特殊解を持つ.

(2) $y = Ax + B$ (A, Bは定数) という形の特殊解の存在が予想される.

$$2y'' - 6y' + 5y = 2\cdot 0 - 6\cdot A + 5(Ax + B) = 5Ax + (-6A + 5B) = x - 2$$

より $5A = 1$, $-6A + 5B = -2$, $A = 1/5$, $B = -4/25$ したがって $y = 1/5\,x - 4/25$ という特殊解を持つ.

(3) $y = Ae^{2x}$ (Aは定数) という形の特殊解があると予想される.

$$y'' + 2y' + y = (4Ae^{2x}) + 2\cdot(2Ae^{2x}) + Ae^{2x} = 9Ae^{2x} = e^{2x} \qquad \therefore A = 1/9$$

したがって $y = 1/9\, e^{2x}$ という特殊解を持つ.

(4) i が特性根である事より $y = x(A\cos x + B\sin x)$ (A, Bは定数) という形の特殊解があると予想される. ライプニッツの定理 (p.60) を使って

$$y'' + y = {}_2C_0 (x)''(A\cos x + B\sin x) + {}_2C_1 (x)'(A\cos x + B\sin x)'$$
$$+ {}_2C_2\, x(A\cos x + B\sin x)'' + x(A\cos x + B\sin x)$$
$$= 0 + 2\cdot(-A\sin x + B\cos x)$$
$$+ x(-A\cos x - B\sin x) + x(A\cos x + B\sin x)$$

Date

$= -2A\sin x + 2B\cos x = \sin x$　　$\therefore A = -\frac{1}{2},\ B = 0$

したがって $y = -\frac{1}{2}x\cos x$ という特殊解を持つ.

B2. (1) $y'' + y' - 2y = 0$ の一般解とB1(1)の結果より一般解は $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} - 3\cos x + \sin x$ (C_1, C_2は任意定数) となる.

(2) $2y'' - 6y' + 5y = 0$ の特性根は $t = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}i$ だから. B1(2)の結果と合わせて. 与式の一般解は $y = e^{\frac{3}{2}x}(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2}) + \frac{1}{5}x - \frac{4}{25}$ (C_1, C_2は任意定数)

(3) $y'' + 2y' + y = 0$ の一般解とB1(3)の結果より. 一般解は $y = e^{-x}(C_1 + C_2x) + \frac{1}{9}e^{2x}$ (C_1, C_2は任意定数).

(4) $y'' + y = 0$ の一般解 $y = C_1\cos x + C_2\sin x$ とB1(4)の結果を合わせて. 与式の一般解は $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x$ (C_1, C_2は任意定数) //