P.179 B.1 $z=f(x,y)$ とする.

(1) $f_x=2x$, $f_y=-y$, $f_{xx}=2$, $f_{xy}=0$, $f_{yy}=-1$, $\Delta = f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2=-2$.

$f_x=0$ かつ $f_y=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$ したがって極値の候補は $f(0,0)$ のみだが, $\Delta(0,0)=-2<0$ よりこれは極値ではない. よって $f(x,y)$ は極値を持たない.

(2) $f_x=-6x+2y$, $f_y=2x-2y$, $f_{xx}=-6$, $f_{xy}=2$, $f_{yy}=-2$ $\Delta=6\cdot2-2^2$

$f_x=f_y=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$. 極値の候補は $f(0,0)$ のみ. $\Delta(0,0)=8>0$ および $f_{xx}<0$ より f は極大値 $f(0,0)=0$ を持つ.

(3) $f_x=2x+y-4$, $f_y=x+2y-2$, $f_{xx}=2$, $f_{xy}=1$, $f_{yy}=2$, $\Delta=2^2-1^2>0$.
$f_x=f_y=0 \Leftrightarrow (x,y)=(2,0)$. 極値の候補は $f(2,0)$ のみ. $\Delta(2,0)>0$ および $f_{xx}(2,0)=2>0$ より f は極小値 $f(2,0)=-4$ を持つ.

(4) $f_x=2x-2y$, $f_y=-2x-6y$, $f_{xx}=2$, $f_{xy}=-2$, $f_{yy}=-6$, $\Delta=2\cdot(-6)-(-2)^2<0$
この時点で何如なる候補に対しても極値にならないので, f は極値を持たない.

(5) $f_x=3x^2-3y$, $f_y=-3x+3y^2$, $f_{xx}=6x$, $f_{xy}=-3$, $f_{yy}=6y$ $\Delta=6^2xy-(-3)^2$

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y=0 & \cdots ① \\ x-y^2=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①より $y=x^2$. ②に代入して $x-x^4=x(1-x^3)=x(1-x)(1+x+x^2)$

判別式を計算する事で $x^2+x+1=0$ は解を持たない事が分かる. よって $x-x^4=0 \Leftrightarrow x=0,1$.

したがって $f_x=f_y=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0),(1,1)$

$\Delta(0,0)=-(-3)^2<0$. $\Delta(1,1)=6^2-(-3)^2>0$, $f_{xx}(1,1)=6>0$

より $f(0,0)$ は極値ではなく, $f(1,1)$ は極小値となる. 以上より f は極小値 $f(1,1)=-1$ を持つ.

(6) $f_x = -2xf$. $f_y = -4yf$.
$f_{xx} = -2f + (-2x)^2 f = 2(2x^2-1)f$. $f_{yy} = -4f + (-4y)^2 f = 4(4y^2-1)f$
$f_{xy} = -2x f_y = 8xyf$. $\Delta = 8\{(2x^2-1)(4y^2-1) - x^2y^2\} f^2$

$f_x = f_y = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$. $\Delta(0,0) = 8((-1)^2 - 0^2)\cdot(f(0,0))^2 > 0$. $f_{xx}(0,0) = -2f(0,0) < 0$

より f は極小値 $f(0,0) = e^{-(0^2+2\cdot0^2)} = 1$ を持つ.

p.179 B.2 $z = f(x,y)$ とし, 括弧内の式に対し $g(x,y) = (左辺) - (右辺)$ と置く.
(1) $f_x = 2$, $f_y = 1$, $g_x = 2x$, $g_y = 2y$. (x, y) が極値をとる候補点ならば

$f_x - \lambda g_x = 0$, $f_y - \lambda g_y = 0 \iff 2 - \lambda\cdot 2x = 0$, $1 - \lambda \cdot 2y = 0$

となる λ が存在. $x = 1/\lambda$, $y = 1/2\lambda$ を g に代入して $g = (1/\lambda)^2 + (1/2\lambda)^2 - 1 = 0$. $\therefore \lambda = \pm\sqrt{5}/2$.
$\therefore (x, y) = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}), (-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$ //

(2) $f_x = 2x+4y$, $f_y = 4x+8y$, $g_x = 2x$, $g_y = 2y$. (x, y) が極値をとる候補点ならば

$f_x - \lambda g_x = f_y - \lambda g_y = 0 \iff \begin{cases} 2x+4y-\lambda\cdot 2x = 0 \\ 4x+8y-\lambda\cdot 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$xy = 1$ より $(x, y) \neq (0, 0)$. したがって $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = 0$. $\lambda = 0, 5$.

$\lambda = 0$ のとき $x + 2y = 0$. これと $x^2+y^2 = 1$ より $(x, y) = (\pm 2/\sqrt{5}, \mp 1/\sqrt{5})$ // (複合同順)
$\lambda = 5$ のとき $2x - y = 0$. これと $x^2+y^2 = 1$ より $(x, y) = (\pm 1/\sqrt{5}, \pm 2/\sqrt{5})$ // (複合同順)

Date

P.179 B.2

(3) $f_x=2x$, $f_y=2y$, $g_x=y$, $g_y=x$. (x,y)が極値をとる候補点ならば

$f_x-\lambda g_x=f_y-\lambda g_y=0 \iff 2x-\lambda y=2y-\lambda x=0$

となるλが存在. $2x^2-\lambda xy=2x^2-\lambda=0$, $2y^2-\lambda xy=2y^2-\lambda=0$ より $x^2=y^2$.
$x=y$ または $x=-y$. 前者の場合 $xy=1$ と合わせて $(x,y)=(1,1),(-1,-1)$.
後者の場合 $xy=1$ と合わせると $-y^2=1$ となるが、これは矛盾している. したがって
候補点は $(1,1)$, $(-1,-1)$ の2つ.

(4) $f_x=1$, $f_y=-2$, $g_x=y$, $g_y=x$. (x,y)が極値をとる候補点ならば
$1-\lambda\cdot y=-2-\lambda\cdot x$ となるλが存在. このとき $\lambda=-x$, $\lambda=2y$, $-x=2y$ だから
$x\cdot y=-1$ と合わせて $y=\pm 1/\sqrt{2}$. したがって候補点は $(x,y)=(\pm\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2})$ (複合同順)

Nakabayashi