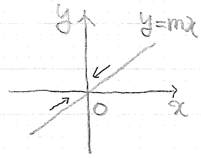
P.145～

B1. (1) $x \neq 0$のとき $y = mx$ とすると $f(x, mx) = \dfrac{x - mx}{x + mx} = \dfrac{1-m}{1+m}$.



直線 $y = mx$ 上で常にこの値をとる. mによりこの値は変わる.
したがって $(0,0)$ への近づき方で値が変わるので, 極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
は存在しない.

(2) $x \neq 0$のとき $y = mx$ とすると $f(x, mx) = \dfrac{x \cdot mx}{x^2 + 2m^2x^2} = \dfrac{m}{1+2m^2}$. mにより値が変わる.
すなわち原点への近づき方で極限が変わるので, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない.

B2 (1) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とする. $(x,y)\to(0,0)$ と $r \to 0$ は同値である.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy + y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin\theta\cos\theta + r^2\sin^2\theta}{\sqrt{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}}$$

$$= \lim_{r\to 0} r(\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta) = 0 //$$

(2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{r^3(\cos^3\theta - \sin^3\theta)}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \lim_{r\to 0} r(\cos^3\theta - \sin^3\theta) = 0 //$$

P.148.

B1. (1) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とするとき、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}}=\lim_{r\to0} r\cos\theta\sin\theta$

$=0=f(0,0)$ より $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続である。

(2) $x\neq0$ のとき、$y=mx$ と置くと $f(x,mx)=\dfrac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2}=\dfrac{1-m^2}{1+m^2}$. m によって値が変わり、
したがって極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在せず、故に $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続ではない。

B2. (1) $2x-y\neq0$ となる (x,y) では連続になる。

(2) $x^2+y^2\neq0$、即ち $(x,y)\neq(0,0)$ となる (x,y) では連続である。一方、$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とするとき、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to0}\frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\lim_{r\to0} r\cos\theta\sin^2\theta=0=f(0,0)$$

より $(x,y)=(0,0)$ の場合も連続。したがって $f(x,y)$ は全て (x,y) で連続である。

P.154 B1

(1) $Z_x = 3x^2 - 4\cdot 2xy + y = 3x^2 - 8xy + y$ //

$Z_y = -4x^2 + x + 3\cdot 2y = -4x^2 + x + 6y$ //

(2) $Z_x = -\frac{y}{x^2}$ // $\quad Z_y = \frac{1}{x}$ //

(3) $Z_x = \cos(x-y)\cdot(x-y)_x = \cos(x-y)$ //

$Z_y = \cos(x-y)\cdot(x-y)_y = \cos(x-y)\cdot(-1) = -\cos(x-y)$ //

(4) $Z_x = -\sin xy \cdot (xy)_x = -y\sin xy$ //

$Z_y = -\sin xy\cdot(xy)_y = -x\sin xy$ //

(5) $Z_x = \left((x^2-4y^2)^{\frac{1}{2}}\right)_x = \frac{1}{2}(x^2-4y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2-4y^2)_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4y^2}}$ //

$Z_y = \frac{1}{2}(x^2-4y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2-4y^2)_y = \frac{-8y}{2\sqrt{x^2-4y^2}} = -\frac{4y}{\sqrt{x^2-4y^2}}$ //

(6) $Z_x = \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)_x = \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$ //

$Z_y = \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)_y = \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$ //

P.154 B2

(1) $Z_x = -\frac{1}{x^2y}$, $\quad Z_y = -\frac{1}{xy^2}$ より

$z - c = -\frac{1}{a^2b}(x-a) - \frac{1}{ab^2}(y-b) \qquad \therefore\ z = -\frac{1}{a^2b}x - \frac{1}{ab^2}y + \frac{3}{ab}$ //

(2) $Z_x = \left((r^2-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\right)_x = \frac{1}{2}(r^2-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(r^2-x^2-y^2)_x = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2-y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$

同様の計算より $Z_y = -\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$

$\therefore\ z - c = -\frac{a}{c}(x-a) - \frac{b}{c}(y-b), \qquad z - c = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y + \frac{a^2+b^2}{c}$

$z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y + \frac{r^2}{c} \qquad \therefore\ z = -\frac{a}{\sqrt{r^2-a^2-b^2}}x - \frac{b}{\sqrt{r^2-a^2-b^2}}y + \frac{r^2}{\sqrt{r^2-a^2-b^2}}$ //

Date . .

p.154 B.3

(1) $z_x = ((x^2-y^2)^{\frac{1}{2}})_x = \frac{1}{2}(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2-y^2)_x = \frac{1}{2}(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$. 同様の計算より

$z_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}$. $\therefore dz = z_x dx + z_y dy = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}(x dx - y dy)$ //

(2) $z_x = (e^x)_x \sin y = e^x \sin y$, $z_y = e^x (\sin y)_y = e^x \cos y$

$\therefore dz = e^x \sin y\, dx + e^x \cos y\, dy$ //

(3) $z_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (\sqrt{x^2+y^2})_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$. 同様の計算より $z_y = \frac{y}{x^2+y^2}$

$\therefore dz = \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$ //

Date

p.157 B.1.

(1) $z_x = (x^2y^2)_x(x-2y) + x^2y^2(x-2y)_x$

$= 2xy^2\cdot(x-2y) + x^2y^2 = 3x^2y^2 - 4xy^3$

$z_{xy} = (3x^2y^2 - 4xy^3)_y = 6x^2y - 12xy^2 = 6xy(x-2y)$ //

(2) $z_y = e^x(\sin y)_y = e^x\cos y$. $z_{yx} = (e^x)_x\cos y = e^x\cos y$ //

(3) $z_x = \cos 2xy\cdot(2xy)_x = 2y\cos 2xy$

$z_{xx} = 2y(\cos 2xy)_x = 2y(-\sin 2xy)\cdot(2xy)_x = -4y^2\sin 2xy$ //

(4) $z_y = (-xy)_y e^{-xy} = -xe^{-xy}$

$z_{yx} = (-x)_x e^{-xy} + (-x)\cdot(e^{-xy})_x = -e^{-xy} - x(-xy)_x e^{-xy} = (xy-1)e^{-xy}$ //

(5) $z_y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(\sqrt{x^2+y^2})_y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+y^2)_y$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y = \dfrac{y}{x^2+y^2}$

$z_{yy} = \dfrac{(y)_y(x^2+y^2) - y\cdot(x^2+y^2)_y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ //

(別解) $z = \log(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)$

$z_y = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2)_y = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y = \dfrac{y}{x^2+y^2}$. z_{yy}は上と同じ計算.

(6) $z_x = \dfrac{1}{1+(xy)^2}\cdot(xy)_x = \dfrac{y}{1+x^2y^2}$

$z_{xy} = \dfrac{(y)_y(1+x^2y^2) - y\cdot(1+x^2y^2)_y}{(1+x^2y^2)^2} = \dfrac{1+x^2y^2-2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} = \dfrac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$ //

P.162 B.1

(1) $z_t \left(= \frac{dz}{dt}\right) = z_x \cdot x_t + z_y \cdot y_t = (x^2-y)_x \cdot (e^t)_t + (x^2-y)_y \cdot (e^{-t})_t$

$= 2x \cdot e^t + (-1)\cdot(-e^{-t}) = 2xe^t + e^{-t}$ //

(2) $z_t = (e^x \sin y)_x \cdot (t^2)_t + (e^x \sin y)_y \cdot (t-1)_t$

$= (e^x)_x \sin y \cdot 2t + e^x (\sin y)_y 1 = e^x(2t\sin y + \cos y)$ //

B.2

(1) $z_u = z_x \cdot x_u + z_y \cdot y_u = \left(\frac{xy}{x+y}\right)_x \cdot (u\cos v)_u + \left(\frac{xy}{x+y}\right)_y (u\sin v)_u$

$= \frac{y(x+y) - xy \cdot 1}{(x+y)^2} \cos v + \frac{x(x+y) - xy \cdot 1}{(x+y)^2} \cdot \sin v$

$= \frac{1}{(x+y)^2}(y^2\cos v + x^2 \sin v)$ //

$z_v = \left(\frac{xy}{x+y}\right)_x \cdot (u\cos v)_v + \left(\frac{xy}{x+y}\right)_y (u\sin v)_v$

$= \frac{y^2}{(x+y)^2} \cdot u(-\sin v) + \frac{x^2}{(x+y)^2} u \cdot \cos v$

$= \frac{u}{(x+y)^2}(-y^2 \sin v + x^2 \cos v)$ //

(2) $z_u = (e^{xy})_x \cdot (u-v)_u + (e^{xy})_y \cdot (uv)_u$

$= y \cdot e^{xy} \cdot 1 + x e^{xy} \cdot v = e^{xy}(y + x \cdot v)$ //

$z_v = y \cdot e^{xy} (u-v)_v + x \cdot e^{xy} (uv)_v = e^{xy}(-y + xu)$ //

(3) $z_x = \left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)_x \cdot (-u^2+v^2)_u + \left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)_y \cdot (uv)_u$

$= \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot (-2u) + \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot v$

$= -\frac{y}{x^2+y^2} \cdot (-2u) + \frac{x}{x^2+y^2} \cdot v = \frac{1}{x^2+y^2}(2yu + xv)$ //

$z_y = -\frac{y}{x^2+y^2} \cdot (-u^2+v^2)_v + \frac{x}{x^2+y^2} (uv)_v$

$= -\frac{y}{x^2+y^2} \cdot 2v + \frac{x}{x^2+y^2} \cdot u = \frac{1}{x^2+y^2}(-2yv + xu)$ //

Date

B.3 yをxの関数(≠独立変数)として微分したものを y' と記す.

(1) $(x^3-3axy+y^3)' = (x^3)'-3a(xy)'+(y^3)'$

$= 3x^2-3a((x)'\cdot y+x\cdot y')+3y^2\cdot y'$

$= 3x^2-3ay-(3ax-3y^2)y' = 0$

$\therefore (3ax-3y^2)y' = 3x^2-3ay$

$\therefore y' = \dfrac{x^2-ay}{ax-y^2}$ //

(2) $(ax^2+2xy+by^2)' = 2ax+2y+2xy'+2byy' = 0$

$2(x+by)y' = -2(ax+y) \quad \therefore y' = -\dfrac{ax+y}{x+by}$ //

(3) $\left(\log(x^2+y^2)-\tan^{-1}\dfrac{y}{x}\right)' = \dfrac{(x^2+y^2)'}{x^2+y^2} - \dfrac{(y/x)'}{1+(y/x)^2}$

$= \dfrac{2x+2yy'}{x^2+y^2} - \dfrac{(y'x-y\cdot x')/x^2}{(x^2+y^2)/x^2} = \dfrac{2x+2y\cdot y'}{x^2+y^2} - \dfrac{y'x-y}{x^2+y^2}$

$= \dfrac{2x+y}{x^2+y^2} - \dfrac{x-2y}{x^2+y^2}y' = 0 \quad \therefore y' = \dfrac{2x+y}{x-2y}$ //

(4) $(xe^{-y}-y\sin x)' = (x)'\cdot e^{-y}+x\cdot(e^{-y})'-(y'\sin x+y(\sin x)')$

$= 1\cdot e^{-y}+x\cdot(-y')\cdot e^{-y} - y'\sin x - y\cos x$

$= e^{-y}-y\cos x-(xe^{-y}+\sin x)y' = 0$

$\therefore y' = \dfrac{e^{-y}-y\cos x}{xe^{-y}+\sin x}$ //