No.
Date

不定形の確認をするために記した.

P.69.

B1. (1) $\lim_{x\to 0}\{(1+x)^5-1\} = \lim_{x\to 0} x = 0$ に注意してロピタルの定理を使えば

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{((1+x)^5-1)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{5(1+x)^4}{1} = 5_{\,/\!/}$$

(別解) 2項定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5-\cancel{1}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}(5+10x+10x^2+5x^3+x^4) = 5_{\,/\!/}$$

(2) $\lim_{x\to 0}\sin^{-1}x = \lim_{x\to 0} x = 0$ に注意してロピタルの定理を使えば

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin^{-1}x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1_{\,/\!/}$$

(別解) $\theta = \sin^{-1}x$ と置く. $x = \sin\theta$. $x\to 0 \Leftrightarrow \theta\to 0$ だから.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}} = \frac{1}{1} = 1_{\,/\!/}$$

(3) $\lim_{x\to 0}\sin x = \lim_{x\to 0}(e^x-e^{-x}) = 0$ とロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-e^{-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(e^x-e^{-x})'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{e^x+e^{-x}} = \frac{1}{e^0+e^0} = \frac{1}{2}_{\,/\!/}$$

(別解) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0}2e^{-x}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x} = \lim_{x\to 0}2e^{-x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x} = 2\cdot e^0\cdot 1 = 2$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-e^{-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-e^{-x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$= \frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}_{\,/\!/}$$

※「$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$」「$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$」は既知とする. □

P.34 (7.5)　　P.46 (10.1)

(4) $\lim_{x\to 0}\log(\cos mx)=\log(1)=0$ とロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos 2x)}{\log(\cos 5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\log(\cos 2x))'}{(\log(\cos 5x))'}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 2x)'/\cos 2x}{(\cos 5x)'/\cos 5x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x}{-5\sin 5x}\cdot\frac{\cos 5x}{\cos 2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x}{\cos 2x}$$

$\lim_{x\to 0}\sin mx=0$ より再びロピタルの定理を使うと

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x)'}{(\sin 5x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\cos 2x}{5\cdot\cos 5x}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2}{5}\ (※)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos 2x)}{\log(\cos 5x)}=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{\cos 0}{\cos 0}=\frac{4}{25}\ /\!/$$

(※)は公式「$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$」を使って次のように計算する事も出来る:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}{5x\cdot\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2}{5}$$

(別解)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos 2x)}{\log(\cos 5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\log(\cos 2x)}{2\log(\cos 5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos^2 2x)}{\log(\cos^2 5x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-\sin^2 2x)}{\log(1-\sin^2 5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 2x\cdot\frac{\log(1-\sin^2 2x)}{-\sin^2 2x}}{-\sin^2 5x\cdot\frac{\log(1-\sin^2 5x)}{-\sin^2 5x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\sin 5x}\right)^2\cdot\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-\sin^2 2x)}{-\sin^2 2x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-\sin^2 5x)}{-\sin^2 5x}}$$

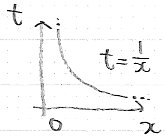
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\sin 5x}\right)^2=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}\right)^2=\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-\sin^2 mx)}{-\sin^2 mx}=\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1$$ ($t=-\sin^2 mx$ と置く. $x\to 0 \Leftrightarrow t\to 0$ だから)

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos 2x)}{\log(\cos 5x)}=\frac{4}{25}\cdot\frac{1}{1}=\frac{4}{25}\ /\!/$$

※「$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$」は既知とする.
P.34 (7.4)

(5) $t=\frac{1}{x}$ と置く。$x\to\infty \Leftrightarrow t\to 0+0$ より



$$\lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) = \lim_{t\to 0+0}\frac{1}{t}\left(e^{t}-1\right) = 1$$ (∵ p.34 (7.5)).

(6) $\lim_{x\to\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 = \lim_{x\to\pi/2}(1-\sin x) = 0$ とロピタルの定理より

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{1-\sin x} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\left(\left(x-\pi/2\right)^2\right)'}{(1-\sin x)'} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{2(x-\pi/2)}{-\cos x}$$

$\lim_{x\to\pi/2}(x-\pi/2) = \lim_{x\to\pi/2}\cos x = 0$ とロピタルの定理より

$$= -2\lim_{x\to\pi/2}\frac{(x-\pi/2)'}{(\cos x)'} = -2\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{-\sin x} = -2\cdot\frac{1}{-1} = 2$$

(別解) $t=x-\pi/2$ と置く。$\sin x = \sin(t+\pi/2) = \cos t$ より

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{(x-\pi/2)^2}{1-\sin x} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{1-\cos t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{1-\cos^2 t}\cdot(1+\cos t)$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{\sin^2 t}\cdot\lim_{t\to 0}(1+\cos t) = 1^2\cdot 2 = 2$$

(7) $\lim_{x\to 0}(x-\sin x) = \lim_{x\to 0}x^3 = 0$ とロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$\lim_{x\to 0}(1-\cos x) = \lim_{x\to 0}3x^2 = 0$ とロピタルの定理より

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}$$

(8) ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{2\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{4\cos 2x}=\frac{1+1}{4\cdot 1}=\frac{1}{2}$$ //

※ "代入"により $\frac{0}{0}$ となる限り、続けてロピタルの定理を使用できる。 □

Date

P.73 B.1

(1) $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, $f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$

$\therefore f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3$

$= 1 - x + x^2 - \frac{1}{(1+\theta x)^4}x^3$ // $(0<\theta<1)$

(2) $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$

$\therefore f(x) = \sin 0 + \frac{\cos 0}{1!}x + \frac{-\sin 0}{2!}x^2 + \frac{-\cos\theta x}{3!}x^3$

$= x - \frac{\cos\theta x}{6}x^3$ // $(0<\theta<1)$

(3) $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$

$\therefore f(x) = \log(1+0) + \frac{1}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{\frac{2}{(1+\theta x)^3}}{3!}x^3 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3(1+\theta x)^3}x^3$ //

$(0<\theta<1)$

(4) $f'(x) = -2\sin 2x$, $f''(x) = -4\cos 2x$, $f'''(x) = 8\sin x$

$\therefore f(x) = \cos 2\cdot 0 + \frac{-2\sin 0}{1!}\cdot x + \frac{-4\cos 2\cdot 0}{2!}x^2 + \frac{8\sin(\theta x)}{3!}x^3$

$= 1 - 2x^2 + \frac{4}{3}\sin(\theta x)x^3$ // $(0<\theta<1)$

(5) $f'(x) = a^x \log a$, $f''(x) = a^x(\log a)^2$, $f'''(x) = a^x(\log a)^3$

$\therefore f(x) = a^0 + \frac{a^0\cdot(\log a)}{1!}x + \frac{a^0(\log a)^2}{2!}x^2 + \frac{a^{\theta x}(\log a)^3}{3!}x^3$

$= 1 + (\log a)x + \frac{(\log a)^2}{2}x^2 + \frac{(\log a)^3\cdot a^{\theta x}}{6}x^3$ //

(6) $f(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}$, $f'(x) = (-1)\cdot\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = (-1)^2\cdot\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(1-x)^{-\frac{3}{2}}$, $f'''(x) = (-1)^3\cdot\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(1-x)^{-\frac{5}{2}}$

$\therefore f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{x^3}{16\sqrt{(1-\theta x)^5}}$ //

Nakabayashi

Date . .

P.79 B.1

(1) $y=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-x/2)}=\frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{x}{2}\right)+\left(-\frac{x}{2}\right)^2+\left(-\frac{x}{2}\right)^3+\cdots\right)=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+\cdots$ //

(2) $y=e^{2x+1}=e\cdot e^{2x}=e\left(1+\frac{1}{1!}(2x)+\frac{1}{2!}(2x)^2+\frac{1}{3!}(2x)^3+\cdots\right)=e+2ex+2ex^2+\frac{4}{3}ex^3+\cdots$ //

(3) $y=\log(1+(-x))=(-x)-\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{3}+\cdots=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots$ //

(4) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{4}x^2-\frac{\sqrt{3}}{12}x^3+\cdots$ //

(5) $y=(1+2x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}(2x)+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}(2x)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}(2x)^3+\cdots$

$=1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\cdots$ //

(6) $\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\tan^{-1}x$, および 等比級数の和 $1+r+r^2+r^3+\cdots=\frac{1}{1-r}$ を用いて

$\tan^{-1}x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x(1-t^2+t^4-t^6+\cdots)dt=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots$ //

※ 以上、全て既知の公式を利用する方法を用いた。(16.1)(16.2)を使って計算する事もできる。

P.79 B.2

(1) $\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots\right)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{7!}x^7-\cdots}{x^3}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}x^2+\frac{1}{7!}x^4-\cdots\right)=\frac{1}{6}$ //

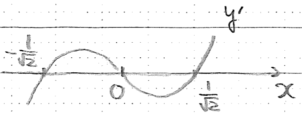
(2) $\lim_{x\to0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots\right)}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{5}x^3+\cdots\right)=\frac{1}{2}$ //

Date

P.84

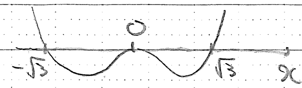
B1 (1) $y' = 4x^3 - 2x = 2x(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)$ より
増減表は次のようになる：



x		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	$\frac{7}{4}$	↗	2	↘	$\frac{7}{4}$	↗
		(極小)		(極大)		(極小)	

∴ 極小値 $\frac{7}{4}$ ($x = \pm 1/\sqrt{2}$ のとき)
極大値 2 ($x = 0$ のとき)

(2) $y' = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ より
増減表は次のようになる：



x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
y'	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↗	$6\sqrt{3}+1$	↘	1	↘	$-6\sqrt{3}+1$	↗
		(極大)				(極小)	

∴ 極小値 $-6\sqrt{3}+1$ ($x = \sqrt{3}$ のとき)
極大値 $6\sqrt{3}+1$ ($x = -\sqrt{3}$ のとき)

(3) $y' = e^{-x} + x(-e^{-x}) = -(x-1)e^{-x}$
$e^{-x} > 0$ より増減表は右のとおり.

x		1	
y'	$+$	0	$-$
y	↗	$1/e$	↘
		(極大)	

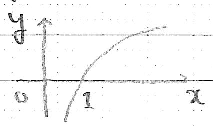
∴ 極大値 $1/e$ ($x = 1$ のとき)

(4) $y' = \log x + x \cdot (1/x) = \log x + 1$ より
増減表は右のとおり.

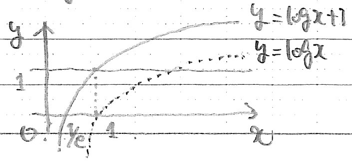
x	0		$1/e$	
y'	/	$-$	0	$+$
y	/	↘	$-1/e$	↗
			(極小)	

∴ 極小値 $-1/e$ ($x = 1/e$ のとき)

※ $y = \log x$ のグラフ



$y = \log x + 1$ のグラフ



(5) $y' = -\sin x - 2\sin x\cdot\cos x$

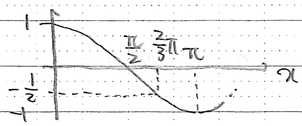
$= -\sin x\,(2\cos x + 1)$

x	0		$\frac{2}{3}\pi$		π
y'		$-$	0	$+$	
y		↘	$-\frac{5}{4}$	↗	
			(極小)		

$y'=0 \iff 2\cos x+1=0 \iff x=\frac{2}{3}\pi$

増減表は右図のとおり. これより $x=\frac{2}{3}\pi$ のとき 極小値 $-\frac{5}{4}$ をとる.

※ $y=\cos x$ のグラフ



(6) $y' = \sqrt{1+x} + x\cdot(\sqrt{1+x})'$

$= \sqrt{1+x} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$= \frac{3x+2}{2\sqrt{1+x}}$

x	-1		$-2/3$	
y'		$-$	0	$+$
y		↘	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↗
			(極小)	

右の増減表より $x=-\frac{2}{3}$ のとき 極小値 $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ をとる

(7) $y' = (x^2-2x^{-1})' = 2x+2x^{-2} = 2(x^3+1)/x^2$

$y'=0 \iff x=-1$

x		-1		0	
y'	$-$	0	$+$	/	$+$
y	↘	3	↗	/	↗
		(極小)			

右の増減表より $x=-1$ のとき 極小値 -3 をとる.

(8) $y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = -x(x-2)e^{-x}$

x		0		2	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘
		(極小)		(極大)	

右の増減表より

$x=0$ のとき 極小値 0

$x=2$ のとき 極大値 $4e^{-2}$ をとる.

Date

B2

(1) $y = x^2 + \frac{1}{2}x^{-1}$ $\quad y' = 2x - \frac{1}{2}x^{-2}$

$y'' = 2 - \frac{1}{2}(-2)x^{-3} = \frac{2x^3+1}{x^3} = \frac{(\sqrt[3]{2}x+1)\cdot\{(\sqrt[3]{2}x)^2 - \sqrt[3]{2}x+1\}}{x^3}$

$y = \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} - \frac{\sqrt[3]{2}}{2} = 0$

右の凹凸表より変曲点は $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0\right)$

x		$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		0	
y''	$-$	0	$+$	/	$+$
y	$\cap$	0	$\cup$	/	$\cup$
		(変曲点)			

※ $x^3+a^3 = (x+a)(x^2+ax+a^2)$, $\quad x^2+ax+a^2$の判別式 $= a^2-4a^2 = -3a^2<0$

(2) $y' = -4x\cdot e^{-2x^2}$ $\quad y'' = -4e^{-2x^2} - 4x(-4x)e^{-2x^2} = 4(4x^2-1)e^{-2x^2}$

右の凹凸表より変曲点は $\left(\pm\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cup$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\cap$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\cup$
		(変曲点)		(変曲点)	