P.6. 1

(1) $n=2k$（偶数）のとき　$(-2)^n = (-1)^{2k}\cdot 2^{2k} = 4^k \geq 1$

$n=2k+1$（奇数）のとき．$(-2)^n = (-1)^{2k+1}\cdot 2^{2k+1} = -2\cdot 4^k \leq -2$

より $(-2)^n$ は n の偶・奇により正，負の値をとり振動し．一定の値に近づかない．
よってこの極限は存在しない．〃

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{0-0}{1+0} = 0$〃

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{2-n}{5n-3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-1}{5-\frac{3}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-1\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n}\right)} = \frac{0-1}{5-0} = -\frac{1}{5}$〃

(4) $\displaystyle (与式) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-(n-1))(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{(n+2-n)(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})\times\frac{1}{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})\times\frac{1}{\sqrt{n}}}$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+0}+1}{1+\sqrt{1-0}} = \frac{1}{2}$〃

(5) $-1 \leq \sin x \leq 1$ より $\displaystyle -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ $({}^{\forall}x>0)$ が成立．

$\displaystyle 0 = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

より $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} = 0$〃

(6) $a \neq 0$ より $1 < 1+a^2$，$\displaystyle 0 < \frac{1}{1+a^2} < 1$．　P.3 定理 1.2 (3) より $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+a^2}\right)^n = 0$〃

P.6. 2

(1) P.5 定理1.4 より この級数は収束する.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(-3)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}_{\text{〃}}$$

(2) は (1) と同様なので省略.

(3) $1<|-7|$ より この級数は発散 (振動) する.

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cdots\right\}=\frac{1}{2}_{\text{〃}}$$

P.6 3.

(1)
$$\begin{aligned}0.\dot{1}2\dot{3}&=0.123+0.000123+0.000000123+\cdots\\&=123\,(0.001+0.000001+0.000000001+\cdots)\\&=123\left(\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^9}+\cdots\right)\\&=123\times\frac{\frac{1}{10^3}}{1-\frac{1}{10^3}}=\frac{123}{999}=\frac{41}{333}_{\text{〃}}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}1.\dot{5}\dot{6}&=1+56\times(0.01+0.0001+0.000001+\cdots)\\&=1+56\times\frac{\frac{1}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}}=1+56\times\frac{1}{99}=\frac{155}{99}_{\text{〃}}\end{aligned}$$

P.12 B1

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-7}{2x^2+x-5} = \lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}} = \frac{3}{2}$ //

(2) (与式) $\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2+x})^2-(\sqrt{2-x})^2}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})} = \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ //

(3) (与式) $\displaystyle = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}})\cdot\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \infty$ //

※ 与式 に $x=\infty$ を (形式的に) 代入すると $\frac{\infty}{\infty}$ となるが、変形後の関数に $x=\infty$ を代入すると $\frac{\infty}{2}$ となる。$\frac{\infty}{\infty}$ は不明だが、$\frac{\infty}{2}$ は "無限大" として確定する。

(4) (与式) $\displaystyle = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x+\sin^2 x)}{\cancel{1-\sin x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin x+\sin^2 x) = 3$ // $(\because \sin\frac{\pi}{2}=1)$

(5) (与式) $\displaystyle = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)}{\cancel{1-\cos x}} = 2\lim_{x\to 0}(1+\cos x) = 4$ //

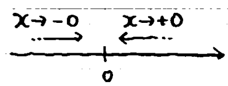
(6) $-1\leqq \sin ax\leqq 1$ より $-\frac{1}{x}\leqq\frac{\sin ax}{x}\leqq\frac{1}{x}$. ここで $x\to\infty$ とすれば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ より

はさみ打ちの原理から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin ax}{x}=0$ //

※ p.49 B1 (1) に似て非なる問題がある。p.48 A1 (2) も参照。

P.12 B2

(1) $x<0$ のとき $|x|=-x$ だから $\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{x}{|x|} = \lim_{x\to -0}\frac{x}{-x} = -1$ //



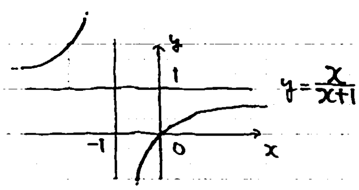
※ ちなみに $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{x}{|x|} = \lim_{x\to +0}\frac{x}{x} = \lim_{x\to +0}1 = 1$ となる (右図参照)

(2) $\displaystyle\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1-\frac{1}{x+1}$ より $y=\frac{x}{x+1}$ のグラフは

$y=-\frac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に -1, y 軸方向に 1 だけ平行

移動したものである事が分かる。このグラフより

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{x}{x+1} = -\infty$$ //



※ この問題は 数式ではなく、グラフで処理する。

P.15 B1

(1) $\lim_{x\to+0}|x| = \lim_{x\to+0} x = 0$, $\lim_{x\to-0}|x| = \lim_{x\to-0}(-x) = 0$ より $\lim_{x\to0}|x| = 0$. 一方, $|x|$に $x=0$ を代入すれば $|0|=0$ だから、極限と代入した値は一致. 故に $x=0$で連続である.

(2) $x=0$ で $x\sin\frac{1}{x}$ は定義されないので. 連続とはならない.

※ 改めて $x=0$で $y=0$ と定義すると連続となる.

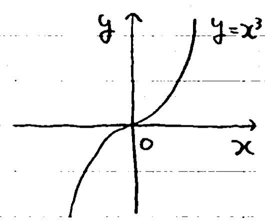
P.16 B2

(1) $x\neq1$ のとき $f(x)=\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=x+1$ より $\lim_{x\to1}f(x)=2$. 一方 定義より $f(1)=2$ だから $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$, 従って $f(x)$ は $x=1$ で連続である.

(2) $x\neq1$ のとき $f(x)=x+1$ より $\lim_{x\to1}f(x)=2$. 一方, 定義より $f(1)=0$ だから $\lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$. 従って $f(x)$ は $x=1$ で不連続である.

P.16 B3

$f(x)$を $f(x) = x^3\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}\right)$ と変形すれば $|x|$が十分大きければ $\frac{a}{x}, \frac{b}{x^2}, \frac{c}{x^3}$ は非常に小さく、従って x^3 とほとんど同じ挙動をする. 故に $f(b)>0$, $f(a)<0$ $(a<b)$ となる a, b が存在する. ここで中間値の定理より



$$f(c)=0 \quad (a<c<b)$$

となる c が少なくとも1つ存在する. これが所望の解である.