

§6.6 Urysohn の距離付け定理

p. 292 1. 距離空間の可算個の族  $\{(S_n, d_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  に対し  $S = \prod_{n \in \mathbb{N}} S_n$  及び

$$d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} \quad (x = (x_n), y = (y_n) \in S)$$

とするとき,  $d$  は  $S$  上の距離関数である事を示せ.

解答 各  $d_n$  を位相的に同値な  $(x_n, y_n) \mapsto d_n(x_n, y_n)/(1 + d_n(x_n, y_n))$  に置き換える事により,  $0 \leq d_n \leq 1$  と仮定してもよい. このとき

$$d(x, y) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 < \infty$$

より  $d(x, y) \in \mathbb{R}$  である.  $d(x, y) \geq 0$  は自明であり,  $x = y$  ならば  $d(x, y) = 0$  も自明. 逆に  $d(x, y) = 0$  ならば  $d_n(x_n, y_n) = 0$  従って  $x_n = y_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $x = y$  となる. また  $d(x, y) = d(y, x)$  も明らか.  $x, y, z \in S$  に対し

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d_n(x_n, z_n) + d_n(z_n, y_n)}{2^n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d_n(x_n, z_n)}{2^n} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d_n(z_n, y_n)}{2^n} = d(x, z) + d(z, y)$$

より三角不等式も成立する. □

p. 292 2. 正則で第 2 可算公理を満たす位相空間は距離付け可能である事を証明せよ.

解答 [松坂] 第 5 章 §3 定理 23 (p.228) より第 2 可算公理を満たす正則空間は正規空間となる. 更に Urysohn の距離付け可能定理 ([松坂] 第 6 章 §6 定理 17 (p.290)) より第 2 可算公理を満たす正則空間は距離付け可能だから, 第 2 可算公理を満たす正則空間は距離付け可能となる. □

p. 292 3.\* 集合  $\mathbb{R}$  に於いて  $[a, b]$  ( $a < b$ ) の形の区間全体の集合  $\tilde{\mathfrak{B}}$  で生成される位相を  $\tilde{\mathfrak{D}}$  とする.  $\mathbb{R}$  にこの位相  $\tilde{\mathfrak{D}}$  を導入して得られる位相空間  $(\mathbb{R}, \tilde{\mathfrak{D}})$  について次の事を示せ.

- 1)  $\mathbb{R}$  の各点  $x$  に対し,  $[x, x + \varepsilon)$  ( $\varepsilon > 0$ ) の全体は  $x$  の基本近傍系を成す.
- 2)  $(\mathbb{R}, \tilde{\mathfrak{D}})$  は正規空間である.
- 3)  $\mathbb{Q}$  は  $(\mathbb{R}, \tilde{\mathfrak{D}})$  に於いて稠密である.
- 4)  $(\mathbb{R}, \tilde{\mathfrak{D}})$  は第 2 可算公理を満たさない.
- 5)  $(\mathbb{R}, \tilde{\mathfrak{D}})$  は距離付け可能ではない.

解答 通常位相を持つ場合と区別する為に,  $(\mathbb{R}, \tilde{\mathfrak{D}})$  を  $\tilde{\mathbb{R}}$  と記す事にする.

1)  $O$  を  $x$  の近傍とする.  $\tilde{\mathfrak{B}}$  は  $\tilde{\mathfrak{D}}$  の開基底だから,  $x \in [a, b] \subset O$  となる  $[a, b] \in \tilde{\mathfrak{B}}$  が存在.  $\varepsilon = (b - x)/2$  とすれば  $x + \varepsilon = (x + b)/2 < b$  より  $[x, \varepsilon) \subset [a, b]$  となる. これより  $[x, x + \varepsilon)$  達が  $x$  の基本近傍系となる事が分かる.

2)  $A, B$  を  $\tilde{\mathbb{R}}$  の共通部分を持たない閉集合とする. 1) より  $a \in A$  に対し  $[a, a + \varepsilon_a) \subset B^c$  となる  $\varepsilon_a > 0$  が存在. 同様に  $b \in B$  に対し  $[b, b + \varepsilon_b) \subset A^c$  となる  $\varepsilon_b > 0$  が存在. ここで  $U = \bigcup_{a \in A} [a, a + \varepsilon_a)$ ,  $V = \bigcup_{b \in B} [b, b + \varepsilon_b)$  とすると  $U, V$  は開集合であり  $A \subset U, B \subset V$  となる. 今,  $U \cap V \neq \emptyset$  だとすると  $[a, a + \varepsilon_a) \cap [b, b + \varepsilon_b) \neq \emptyset$  となる  $a \in A, b \in B$  が存在.  $a < b$  と仮定する.  $a + \varepsilon_a \leq b$  だとすると  $[a, a + \varepsilon_a) \cap [b, b + \varepsilon_b) = \varepsilon$  となるから  $b < a + \varepsilon_a$ ,  $0 < b - a < \varepsilon_a$ , 従って  $b = a + b - a \in [a, a + \varepsilon_a)$  が成立. しかしこれは  $[a, a + \varepsilon_a) \subset B^c$  に反する.  $b < a$  と仮定しても同様の議論により矛盾が生じる. 故に  $U \cap V = \emptyset$  である.

3)  $\mathbb{R}$  に於ける  $\mathbb{Q}$  の稠密性より任意の半開区間は  $\mathbb{Q}$  と共通部分を持つ事より明らか.

- 4)  $\mathfrak{B}$  を  $\tilde{\mathbb{R}}$  の開基底とする. 開集合  $[x, x+1)$  に対し  $x \in U_x \subset [x, x+1)$  となる  $U_x \in \mathfrak{B}$  をとる. 取り方より  $\min U_x = x$  だから,  $x \neq x'$  ならば  $U_x \neq U_{x'}$  となる.  $\{U_x\}_{x \in \mathbb{R}} \subset \mathfrak{B}$  だから  $\mathfrak{B}$  は非可算個から成る部分集合を含む. 故に  $\tilde{\mathbb{D}}$  は第 2 可算公理を満たさない.
- 5) 3) より  $\tilde{\mathbb{R}}$  は可分だから, 距離付け可能だとすれば  $\tilde{\mathbb{R}}$  は第 2 可算公理を満たす ([松坂] 第 6 章 §1 定理 1 (p.237)) が, 4) より  $\tilde{\mathbb{R}}$  は第 2 可算公理を満たさないので距離付け出来ない.  $\square$