

§6.5 ノルム空間, Banach 空間

p. 283 1. ノルム空間  $(S, \|\cdot\|)$  \*2に於いて  $d = d(\|\cdot\|)$  とすれば, 任意の  $x, y, z \in S, \lambda \in \mathbb{R}$  に対して

- (i)  $d(x+z, y+z) = d(x, y),$
- (ii)  $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$

が成り立つ事を示せ. 逆にベクトル空間  $S$  上に (i),(ii) を満たす距離関数  $d$  が与えられているとき,  $\|x\| = d(0, x)$  ( $0 \in S$  は零元) と置けば  $\|\cdot\|$  は  $S$  上のノルムとなり,  $d$  はそのノルム  $\|\cdot\|$  から定められる距離関数  $d(\|\cdot\|)$  と一致する事を示せ.

解答 ノルムから定まる  $d$  について

- (i)  $d(x+z, y+z) = \|(x+z) - (y+z)\| = \|x-y\| = d(x, y).$
- (ii)  $d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda|\|x-y\| = |\lambda|d(x, y).$

より (i) (ii) が成立する. 逆に (i) (ii) を満たす  $d$  について  $\|x\| = d(x, 0)$  と置く. (Ni) (Nii) は明らか.

(Niii)  $\|\lambda x\| = d(\lambda x, \lambda 0) = |\lambda|d(x, 0) = |\lambda|\|x\|.$

(Niv)  $\|x+y\| \leq d(x+y, 0+y) + d(y, 0) = d(x, 0) + d(y, 0) = \|x\| + \|y\|.$

より (Niii) (Niv) も成立. 従って  $\|\cdot\|$  はノルムとなる. □

p. 284 2. ノルム空間  $S = (S, \|\cdot\|)$  に於いて次の事を示せ.

- (a)  $S$  の各元  $x$  に  $\mathbb{R}$  の元  $\|x\|$  を対応させる写像は  $S$  から  $\mathbb{R}$  への一様連続写像である.
- (b)  $S \times S \ni (x, y)$  に  $x+y \in S$  を対応させる写像,  $\mathbb{R} \times S \ni (\lambda, x)$  に  $\lambda x \in S$  を対応させる写像はいずれも連続写像である.

解答 (a)  $x \in S$  とする. 任意の  $\varepsilon > 0$  について  $d(x, y) < \varepsilon$  だとすると三角不等式より

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\| = d(x, y) < \varepsilon$$

従って  $\varepsilon$  に対し  $\delta = \varepsilon$  とすればよい.

(b)  $(x, y) \in S \times S$  に対し  $(z, w) \in B(x; \varepsilon/2) \times B(y; \varepsilon/2)$  をとれば

$$d(x+y, z+w) = \|(x+y) - (z+w)\| \leq \|x-z\| + \|y-w\| = d(x, z) + d(y, w) < \varepsilon.$$

よって  $(B(x; \varepsilon/2) \times B(y; \varepsilon/2)) \subset B(x+y; \varepsilon)$  は連続である.  $(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times S$  とする. 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $0 < \delta < \min\{1, \varepsilon/(|\lambda| + \|x\| + 1)\}$  となる  $\delta$  をとれば  $(\mu, y) \in B(\lambda; \delta) \times B(x; \delta)$  に対し

$$\begin{aligned} d(\lambda x, \mu y) &= \|\lambda(x-y) + (\lambda-\mu)x + (\mu-\lambda)(x-y)\| \\ &\leq |\lambda|\|x-y\| + |\lambda-\mu|\|x\| + |\mu-\lambda|\|x-y\| < (|\lambda| + \|x\|)\delta + \delta^2 < (|\lambda| + \|x\| + 1)\delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

故に  $(B(\lambda; \delta) \times B(x; \delta)) \subset B(\lambda x; \varepsilon)$  となる. □

p. 284 3.  $p$  を  $\geq 1$  である 1 つの実数とし, ベクトル空間  $\mathbb{R}^n$  に於いて

$$\|x\|_p^{(n)} := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

と置けば,  $\|\cdot\|_p^{(n)}$  は  $\mathbb{R}^n$  上のノルムである事を証明せよ.

---

\*2  $\mathbb{R}$  上の線形空間  $S$  上の関数  $\|\cdot\| : S \rightarrow \mathbb{R}$  について次の条件 (Ni)~(Niv) が成立するとき,  $\|\cdot\|$  を  $S$  上のノルム, 対  $(S, \|\cdot\|)$  をノルム空間という:

- (Ni) 任意の  $x \in S$  に対し  $\|x\| \geq 0$ .
- (Nii)  $\|x\| = 0$  となるのは  $x = 0$  のとき, またそのときに限る.
- (Niii) 任意の  $x \in S, \lambda \in \mathbb{R}$  に対し  $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ .
- (Niv) 任意の  $x, y \in S$  に対し  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

解答 (Ni) (Nii) 及び (Niii) は自明.  $p = 1$  のとき,

$$\|x + y\|_1 \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

より (Div) が成立. 次に  $p > 1$  だとする.  $p$  に対し  $f(x) = (x^p - 1)/p - x + 1$  と置く.  $f'(x) = x^{p-1} - 1$  より  $x > 1$  ならば  $f'(x) > 0$ , 従って狭義単調増加.  $f(1) = 0$  より  $f(x) \geq 0$  ( $x \geq 1$ ). 特に  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$  となる. ここで  $q > 1$  を  $(1/p) + (1/q) = 1$  (即ち  $q = p/(p-1)$ ) で定める.  $a \geq 0, b > 0$  となる  $a, b$  に対し  $x = ab^{1/(1-p)}$  とすれば  $1/(1-p) = 1 - q$  より

$$ab^{1-q} = ab^{1/(1-p)} \leq \frac{a^p b^{p/(1-p)}}{p} + 1 - \frac{1}{p} = \frac{a^p b^{-q}}{p} + \frac{1}{q}$$

$$\therefore ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

この不等式は  $b = 0$  の場合も含めて成立する.  $x, y \in \mathbb{R}^n$  に対し  $a = |x_i|/ \|x\|_p, b = |y_i|/ \|y\|_q$  として辺々加えると

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i| |y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{p \|x\|_p^p} + \frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}{q \|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

従って次の Hölder の不等式 が成立する :

$$\therefore \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q \quad \left( = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q} \right)$$

Hölder の不等式と  $q(p-1) = p$  より

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/q} + \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/q} \\ &= (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p/q} = (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

$\|x + y\|_p \neq 0$  のとき, 両辺を  $\|x + y\|_p^{p-1}$  で割れば Minkowski の不等式

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

を得る. この不等式は  $\|x + y\|_p = 0$  の場合も含めて成立する. □

**p. 284 4.**  $p$  を正の実数とし, ベクトル空間  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) に於いて

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

と置く. これが  $\mathbb{R}^n$  上のノルムとなる為には,  $p \geq 1$  でなければ成らない事を示せ.

解答 三角不等式  $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$  に対し  $x = [1, 0, 0, \dots, 0], y = [0, 1, 0, \dots, 0]$  とすれば  $2^{1/p} \leq 2$  となる. これが成立するためには  $1/p \leq 1$ , 即ち  $1 \leq p$  でなければならない. □

**p. 284 5.**  $\mathbb{R}^n$  の点  $x$  について次の事を示せ.

(a)  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  ならば  $\|x\|_p^{(n)} \geq \|x\|_q^{(n)}$ .

(a)  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p^{(n)} = \|x\|_\infty^{(n)}$ .

解答 (a)  $0 \leq a \leq 1$  に対し  $a^p \geq a^q$  ( $1 \leq p \leq q < \infty$ ) が成立.  $\|x\|_p \neq 0$  のとき,  $a = |x_i|/\|x\|_p$  と置いて  $1 \leq i \leq n$  に渡り和をとれば

$$1 = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{\|x\|_p^p} \geq \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^q}{\|x\|_p^q} = \left( \frac{\|x\|_q}{\|x\|_p} \right)^q.$$

故に  $1 \geq \|x\|_q/\|x\|_p$ ,  $\|x\|_p \geq \|x\|_q$  となる. これは  $\|x\|_p = 0$  のときも含めて成立する.  $\|\cdot\|_\infty$  の定義より  $\|x\|_p \geq \|x\|_\infty$  となる事は自明. 故に  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  となる任意の  $p, q$  について  $\|x\|_p \geq \|x\|_q$  が成立する.

(b)  $\|x\|_\infty = |x_i|$  だとすると

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq (n|x_i|^p)^{1/p} = n^{1/p}\|x\|_\infty$$

だから  $p \rightarrow \infty$  のとき  $n^{1/p} \rightarrow 1$  である事, 及び挟み打ちの原理より  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$  となる. □

**p. 285 6.** ノルム空間  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p^{(n)})$  ( $p \geq 1$ ) は Banach 空間である事を証明せよ.

解答 問題 5 (b) の解答より  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty$ . 再びこの不等式より  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ ,  $n^{-1/2}\|x\|_2 \leq \|x\|_\infty$  となり, これらを併せれば

$$n^{-1/2}\|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty \leq n^{1/p}\|x\|_2$$

となる.  $\|\cdot\|_p$  に関する任意の Cauchy 列  $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$  をとる.  $n^{-1/2}\|x_m - x_n\|_2 \leq \|x_m - x_n\|_p$  となるから  $\{x_n\}$  は Euclid ノルム  $\|\cdot\|_2$  に関する Cauchy 列となる. §3 問題 11 (p.263) より  $\mathbb{R}^n$  は Euclid ノルムに関し完備だから,  $\{x_n\}$  は収束列であり,  $x$  をその極限とすると,  $\|x_n - x\|_p \leq n^{1/p}\|x_n - x\|_2$  だから,  $\{x_n\}$  は  $\|\cdot\|_p$  に関して  $x$  に収束する. よって任意の Cauchy 列は収束列となり, 従って  $\mathbb{R}^n$  は  $\|\cdot\|_p$  に関して完備である. □

**p. 285 7.**  $p$  を  $\geq 1$  である 1 つの実数とし,  $\mathbb{R}^N$  の部分集合  $l^{(p)}$  を

$$l^{(p)} = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

と定める.  $l^{(p)}$  は (加法  $x+y = (x_n+y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , スカラー乗法  $\lambda x = (\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  に関して) ベクトル空間を成し, かつ  $x \in l^{(p)}$  に対して

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

と置けば  $\|\cdot\|_p$  は  $l^{(p)}$  上のノルムで,  $(l^{(p)}, \|\cdot\|_p)$  は Banach 空間となる事を証明せよ.

解答  $\|\cdot\|_p$  がノルムである事: (Ni) (Nii) (Niii) は明らか. (Niv) は 問題 3 の Minkowski の不等式 (p.284 (\*)) より  $x, y \in l_p$  に対し

$$\left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

右辺について  $n \rightarrow \infty$  とすれば  $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$  となる.

$l_p$  が  $\|\cdot\|_p$  に関し完備である事:  $\{x_n\}$  ( $x_n = \{x_{n,i}\}$ ) を  $l_p$  内の  $(\|\cdot\|_p)$  に関する Cauchy 列とすると, 各  $i$  について

$$|x_{n,i} - x_{m,i}| \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_{n,i} - x_{m,i}|^p \right)^{1/p} = \|x_n - x_m\|_p = d_p(x_n, x_m)$$

より各成分  $\{x_{n,i}\}_{n=1,2,\dots}$  は  $\mathbb{R}$  の Cauchy 列となる.  $\mathbb{R}$  は完備だから  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,i} = x_i^*$  が存在.  $x^* = \{x_i^*\}_{i=1,2,\dots}$  と置く. 任意の  $\varepsilon > 0$  をとる.  $\{x_n\}$  は Cauchy 列だから

$$\|x_m - x_n\|_p < \varepsilon \quad (m, n \geq n_0)$$

となる  $n_0$  が存在し,  $m, n \geq n_0$  及び任意の  $N$  に対し

$$\left( \sum_{i=1}^N |x_{n,i} - x_{m,i}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon$$

が成立. ここで  $m \rightarrow \infty$  とすると  $(\sum_{i=1}^N |x_{n,i} - x_i^*|^p)^{1/p} \leq \varepsilon$ . 更に  $N \rightarrow \infty$  とすれば

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_{n,i} - x_i^*|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon \quad (1)$$

となる. Minkowski の不等式より

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^N |x_i^*|^p \right)^{1/p} &= \left( \sum_{i=1}^N |x_{n,i} - (x_{n,i} - x_i^*)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^N |x_{n,i}|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^N |x_{n,i} - x_i^*|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_{n,i}|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_{n,i} - x_i^*|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_{n,i}|^p \right)^{1/p} + \varepsilon. \end{aligned}$$

これより  $x^* \in l_p$  となる事が分かる. 再び (1) より  $\|x_n - x^*\|_p \rightarrow 0$ , 従って  $\{x_n\}$  は  $x^*$  に,  $d_p$  に関して収束する.

以上より  $l_p = (l_p, \|\cdot\|_p)$  は Banach 空間となる. □

**p. 285 8.**  $l^p = (l^p, \|\cdot\|_p)$  は距離空間として可分である事を示せ.

解答  $M = \{\{x_n\}_{n=1,2,\dots} : x_n \in \mathbb{Q} (\forall n), x_n = 0 (n \geq 0)\}$  \*3 と置く.  $N = 1, 2, \dots$  に対し

$$M_N = \{\{x_n\}_{n=1,2,\dots} : x_n \in \mathbb{Q} (\forall n), x_n = 0 (n > N)\} \quad (\simeq \mathbb{Q}^N)$$

とすれば  $M_N$  は可算集合であり,  $M = \bigcup_{N=1}^{\infty} M_N$  だから  $M$  も可算集合となる\*4

任意の  $x = \{x_n\}_{n=1,2,\dots} \in l^p$ , 及び任意の  $\varepsilon > 0$  をとる. 有理数の稠密性より各  $n = 1, 2, \dots$  に対し  $|x_n - q_n| < (6\varepsilon^p/\pi^2 n^2)^{1/p}$  となる  $q_n \in \mathbb{Q}$  が存在.  $q = \{q_n\}_{n=1,2,\dots}$  と置けば Minkowski の不等式より

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |q_n - x_n|^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6\varepsilon^p}{\pi^2 n^2} = \frac{6\varepsilon^p}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^p}{n^2} = \frac{6\varepsilon^p}{\pi^2} \frac{\pi^2}{6} = \varepsilon^p, \\ \left( \sum_{n=1}^{\infty} |q_n|^p \right)^{1/p} &\leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |q_n - x_n|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty \end{aligned}$$

\*3 ' $n \geq 0$ ' は '十分大きな  $n$  に対し' という意味.

\*4 集合族  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  について, (甲) 各  $A_\lambda$  は高々可算, (乙) 添字集合  $\Lambda$  は高々可算 という 2 条件が成立するならば和集合  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  は再び可算集合となる

より  $q \in I^p$  かつ  $\|q - x\|_p \leq \varepsilon$  となる。故に  $M$  は  $I^p$  に於いて稠密。

以上より  $I^p$  は稠密な可算集合を持つ事が分かり、よって可分である。 □

**p. 285 9.**  $S$  を ( $\mathbb{R}$  上の) ベクトル空間とする。  $\varphi$  を次の条件 (Sp i)-(Sp iv) を満たすような  $S \times S$  から  $\mathbb{R}$  への写像とする [以下,  $(x, y) \in S \times S$  の  $\varphi$  による像  $\varphi(x, y)$  を  $\langle x, y \rangle$  と記す]。

- (Sp i) 任意の  $x, y \in S$  に対し  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ .
- (Sp ii) 任意の  $x_1, x_2, y \in S$  に対し  $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$ .
- (Sp iii) 任意の  $x, y \in S, \lambda \in \mathbb{R}$  に対し  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ .
- (Sp iv) 任意の  $x \in S$  に対し  $\langle x, x \rangle \geq 0$ , 更に  $x \neq 0$  ならば  $\langle x, x \rangle > 0$ .

このとき  $\varphi = \langle, \rangle$  を  $S$  上の内積またはスカラー積という。ベクトル空間  $S$  上に 1 つの内積  $\langle, \rangle$  が与えられるとき,  $S$  の各元  $x$  に対し

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

と置けば, 次の事が成り立つ事を示せ。

- (a) 任意の  $x \in S$  に対して  $\|x\| \geq 0$  で,  $\|x\| = 0$  となるのは  $x = 0$  のときまたそのときに限る。
- (b) 任意の  $x \in S$ , 任意の  $\lambda \in \mathbb{R}$  に対して  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ .
- (c) 任意の  $x, y \in S$  に対して  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ . (これを **Schwarz の不等式** という.)
- (d) 任意の  $x, y \in S$  に対して  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**解答** (a) 定義より  $\|x\| \geq 0$  となる事は自明。また (Sp iv) より  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$  となる。

(b) (Sp i) (Sp iii) より

$$\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \langle \lambda x, x \rangle = \lambda^2 \|x\|^2$$

より  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ .

(c) 任意の実数  $t$  について

$$\|tx + y\|^2 = \|x\|^2 t^2 + 2\langle x, y \rangle t + \|y\|^2 \geq 0$$

$t$  に関する 2 次関数と考えれば, その判別式は  $\langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$ , 従って  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$  となる。

(d) Schwarz の不等式より

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

故に  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  となる。 □

**p. 286 10.** ベクトル空間  $\mathbb{R}^n$  の任意の 2 点  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$  に対して

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

と定義すれば  $\langle, \rangle$  は  $\mathbb{R}^n$  上の 1 つの内積となる事を示せ。(これを  $\mathbb{R}^n$  上の標準的内積という。) この内積から前問のようにして定められる  $\mathbb{R}^n$  上のノルムは  $\|\cdot\|^{(n)}$  に他ならない事, またこの内積に関する前問 (c) の不等式は

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

に他ならない事を確かめよ。

解答  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n), z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$  とする.

- (Sp i)  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \langle y, x \rangle.$   
 (Sp ii)  $\langle x + y, z \rangle = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) z_i = \sum_{i=1}^n (x_i z_i + y_i z_i) = \sum_{i=1}^n x_i z_i + \sum_{i=1}^n y_i z_i = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$   
 (Sp iii)  $\langle \lambda x, y \rangle = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i) y_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i y_i = \lambda \langle x, y \rangle.$   
 (Sp iv)  $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0.$  特に  $x \neq 0$  ならば  $x_i \neq 0$ , 従って  $x_i^2 > 0$  となる  $i$  があり, これより  $\langle x, x \rangle > x_i^2 > 0$  となる.

以上より標準内積は内積の公理を満たす事が確められた. 他の主張は明らか.  $\square$

**p. 286 11.** Hilbert 空間  $l^{(2)}$  の任意の 2 点  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  に対して, 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$  は収束する事を示せ. またこの級数の和を  $\langle x, y \rangle$  と定義すれば  $\langle, \rangle$  は  $l^{(2)}$  上の 1 つの内積となる事を確かめよ.

解答 任意の  $n$  に対し Hölder の不等式 (p.284 3) より

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2} \leq \|x\|_2 \|y\|_2 < \infty$$

だから, 級数  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$  は (絶対) 収束する.

(Sp i) 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し

$$\left| \langle x, y \rangle - \sum_{i=1}^n x_i y_i \right|, \left| \sum_{i=m+1}^n x_i y_i \right| < \varepsilon/3$$

( $\forall m, n \geq n_0$ ) となる  $n_0$  がとれる.  $m, n \geq n_0$  のとき

$$|\langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle| \leq \left| \langle x, y \rangle - \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| + \left| \sum_{i=m+1}^n x_i y_i \right| + \left| \sum_{i=1}^m y_i x_i - \langle y, x \rangle \right| < \varepsilon$$

が成立. 従って  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  である.

(Sp ii) 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し

$$\left| \langle x + y, z \rangle - \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) z_i \right|, \left| \langle x, z \rangle - \sum_{i=1}^n x_i z_i \right|, \left| \langle y, z \rangle - \sum_{i=1}^n y_i z_i \right|, \left| \sum_{i=m+1}^n (x_i + y_i) z_i \right| < \varepsilon/4$$

( $\forall m, n \geq n_0$ ) となる  $n_0$  がとれる.  $m, n \geq n_0$  のとき

$$\begin{aligned} & |\langle x + y, z \rangle - \langle x, z \rangle - \langle y, z \rangle| \\ & \leq \left| \langle x + y, z \rangle - \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) z_i \right| + \left| \sum_{i=m+1}^n (x_i + y_i) z_i \right| + \left| \sum_{i=1}^m x_i z_i - \langle x, z \rangle \right| + \left| \sum_{i=1}^m y_i z_i - \langle y, z \rangle \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

が成立. 従って  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$  である.

(Sp iii)  $\lambda = 0$  のときは自明なので  $\lambda \neq 0$  だとする. 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し

$$\left| \langle \lambda x, y \rangle - \sum_{i=1}^n \lambda x_i y_i \right| < \varepsilon/3, \quad \left| \langle x, y \rangle - \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| < \varepsilon/3|\lambda|, \quad \left| \sum_{i=m+1}^n x_i y_i \right| < \varepsilon/3|\lambda|$$

( $\forall m, n \geq n_0$ ) となる  $n_0$  がとれる.  $m, n \geq n_0$  のとき

$$|\langle \lambda x, z \rangle - \lambda \langle x, y \rangle| \leq \left| \langle \lambda x, z \rangle - \sum_{i=1}^n \lambda x_i y_i \right| + |\lambda| \left| \sum_{i=m+1}^n x_i y_i \right| + |\lambda| \left| \sum_{i=1}^m x_i y_i - \langle x, y \rangle \right| < \varepsilon$$

が成立. 従って  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$  である.

(Sp iv)  $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \geq 0$ . 特に  $x \neq 0$  ならば  $x_i \neq 0$ , 従って  $x_i^2 > 0$  となる  $i$  があり, これより  $\langle x, x \rangle > x_i^2 > 0$  となる.

以上より  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は内積の公理を満たす事が確認された.  $\square$

**p. 286 12.** 実数の区間  $[0, 1]$  上で定義された実連続関数全体の作る ( $\mathbb{R}$  上の) ベクトル空間を  $S$  とする.  $S$  の任意の 2 元  $f, g$  に対し

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

と定義すれば  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $S$  上の 1 つ内積となる事を示せ.

解答  $\langle f, g \rangle$  が確定する事は自明.

$$(Sp i) \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 g(x)f(x)dx = \langle g, f \rangle.$$

(Sp ii) 積分の線形性より

$$\begin{aligned} \langle f + g, h \rangle &= \int_0^1 (f(x) + g(x))h(x)dx = \int_0^1 (f(x)h(x) + g(x)h(x))dx \\ &= \int_0^1 f(x)h(x)dx + \int_0^1 g(x)h(x)dx = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle. \end{aligned}$$

(Sp iii) 積分の線形性より

$$\langle \lambda f, g \rangle = \int_0^1 \lambda f(x)g(x)dx = \lambda \int_0^1 f(x)g(x)dx = \lambda \langle f, g \rangle.$$

(Sp iv)  $\langle f, f \rangle = \int_0^1 f(x)^2 dx \geq 0$ . 今,  $f \neq 0$  だとする. 必要ならば  $(-1)$  倍する事により  $f(x) > 0$  となる  $x \in [0, 1]$  があると仮定してもよい.  $0 < \varepsilon < f(x)$  となる  $\varepsilon$  を固定するとき,  $f$  の連続性より  $\varepsilon < f(y)$  ( $y \in [a, b]$ ,  $a \leq x \leq b$ ,  $a < b$ ) となる  $[0, 1]$  内の区間  $[a, b]$  が存在する. このとき

$$\langle f, f \rangle \geq \int_a^b f(x)^2 dx \geq \int_a^b \varepsilon^2 dx = \varepsilon^2(b - a) > 0$$

以上より  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は内積の公理を満たす事が確認された.  $\square$

**p. 286 13.**  $S$  を内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  の与えられたベクトル空間とする.  $S$  の元  $x, y$  がこの内積に関して直交するとは,  $\langle x, y \rangle = 0$  である事を謂う.  $a_1, \dots, a_m$  を全て 0 でない  $S$  の元  $m$  とし,  $i \neq j$  ならば  $a_i$  と  $a_j$  は直交するとする. そのとき  $a_1, \dots, a_m$  は 1 次独立である事を示せ.

解答  $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0$  だとすると  $\lambda_i = \langle a_i, \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m \rangle = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) より  $\{a_1, \dots, a_m\}$  は 1 次独立である.  $\square$

**p. 286 14.**  $S$  を内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  の与えられた  $n$  次元ベクトル空間とする.  $S$  の基底  $B_0 = \{v_1, \dots, v_n\}$  は, その相違なる任意の 2 元  $v_i, v_j$  ( $i \neq j$ ) が互いに直交し, かつ全ての  $v_i$  のノルムが 1 であるとき,  $S$  の正規直交基底だという. 今,

$B = \{w_1, \dots, w_n\}$  を  $S$  の任意の基底とする.  $S$  の元  $v'_1, \dots, v'_n$  を順次

$$\begin{aligned} v'_1 &= w_1, \\ v'_2 &= w_2 - \frac{\langle w_2, v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1, \\ &\dots\dots\dots \\ v'_n &= w_n - \frac{\langle w_n, v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1 - \dots - \frac{\langle w_n, v'_{n-1} \rangle}{\langle v'_{n-1}, v'_{n-1} \rangle} v'_{n-1} \end{aligned}$$

によって定め,

$$v_1 = \frac{v'_1}{\|v'_1\|}, \quad v_2 = \frac{v'_2}{\|v'_2\|}, \quad \dots, \quad v_n = \frac{v'_n}{\|v'_n\|}$$

と置けば,  $B_0 = \{v_1, \dots, v_n\}$  は  $S$  の正規直交基底となる事を示せ.

解答 (Niii) より  $\|v_i\| = \|v'_i\|/\|v'_i\| = 1$ .  $j$  に関する帰納法により  $\langle v_i, v'_j \rangle = 0$  ( $1 \leq i < j$ ) となる事を示す.  $j = 1$  のときは自明なので,  $j > 1$  とする. (Sp i) (Sp ii) (Sp iii) と帰納法の仮定より

$$\begin{aligned} \langle v_i, v'_j \rangle &= \langle v_i, w_j \rangle - \langle w_j, v_1 \rangle \langle v_i, v_1 \rangle - \dots - \langle w_j, v_{j-1} \rangle \langle v_i, v_{j-1} \rangle \\ &= \langle v_i, w_j \rangle - \langle w_j, v_1 \rangle \delta_{i1} - \dots - \langle w_j, v_{j-1} \rangle \delta_{i,j-1} = \langle v_i, w_j \rangle - \langle w_j, v_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

よって任意の  $j$  について  $\langle v_i, v'_j \rangle = 0$ ,  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ) が成立する (Sp i) と併せて  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$  ( $i \neq j$ ) となる. 問題 13 より  $\{v_1, \dots, v_n\}$  は基底, 従って正規直交基底である.  $\square$

p. 286 15. 標準的内積の与えられたベクトル空間  $\mathbb{R}^n$  に於いて

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

と置けば  $\{e_1, \dots, e_n\}$  は  $\mathbb{R}^n$  の 1 つの正規直交基底である事を示せ.

解答  $e_i = (\delta_{1i}, \dots, \delta_{ni})$  だから  $\langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=1}^n \delta_{ki} \delta_{kj} = \delta_{ij}$ . 従って標準基底  $\{e_1, \dots, e_n\}$  は標準内積に関する正規直交基底である.  $\square$

p. 286 16.  $S$  を内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  の与えられた  $n$  次元ベクトル空間とし,  $B_0 = \{v_1, \dots, v_n\}$  を  $S$  の 1 つの正規直交基底とする. そのとき  $S$  の元  $x, y$  を  $(v_i)$  の 1 次結合として表した式をそれぞれ  $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ ,  $y = \sum_{i=1}^n y_i v_i$  ( $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ ) とすれば

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

である事を示せ.

解答 (Sp ii) (Sp iii) より  $\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i,j=1}^n x_i y_i$ .  $\square$