§6.4 コンパクト距離空間，距離空間の完備化

p. 274 1. 距離空間 S について次の 2 条件が値である事を示せ：
(FC) S の任意の点列は収束する部分列を含む．
(FC)' S は有限集合であるか，または S の任意の無限部分集合は (S の中に) 少なくとも 1 つの集積点を持つ．

解答 (FC) が成立したとする．S が無限部分集合 M を含むとする．M 内の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をとれば (FC) より $x\in S$ と x に収束する部分列が存在する．x は M の集積点だから，S は (FC)' を満たす事が分かる．

逆に (FC)' が成立したとする．$\{x_n\}$ を S の点列とする．S が有限ならば収束部分列を含む事は自明．一方，$\{x_n\}$ が無限集合だとすると仮定より集積点 x が存在．このとき $\{x_n\}$ の適当な部分列をとれば x に収束する．従って (FC) が成立する．□

p. 274 2. (S,d) を距離空間とする．S の Cauchy 列の全体を $C(S)$ とする．$\xi=\{x_n\},\eta=\{y_n\}\in C(S)$ に対し

$$\xi\sim\eta \qquad \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} \qquad \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0$$

とすれば $\sim$ は $C(S)$ 上の同値関係となる．$\sim$ による商空間 $C(S)/\sim$ を S^* と記し，$C(S)$ から S^* への射影を π とする．$x^*,y^*\in S^*$ に対し

$$d^*(x^*,y^*)=\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) \qquad (x^*=\pi(\{x_n\}),\ y^*=\pi(\{y_n\}))$$

と置けば $d^*(x^*,y^*)$ は well-defined となる事，及び d^* が S^* 上の距離関数である事を示せ．

解答 $x^*=\pi(\{x_n\})=\pi(\{x'_n\}),\ y^*=\pi(\{y_n\})=\pi(\{y'_n\})$ とする．

$$\begin{aligned}|d(x'_n,y'_n)-d^*(x^*,y^*)| &\le |d(x'_n,y'_n)-d(x_n,y_n)|+|d(x_n,y_n)-d^*(x^*,y^*)|\\ &\le d(x_n,x'_n)+d(y_n,y'_n)+|d(x_n,y_n)-d^*(x^*,y^*)|\end{aligned}$$

より $\lim_{n\to\infty} d(x'_n,y'_n)=d^*(x^*,y^*)$ となる．

(Di) $d^*(x^*,y^*)\ge 0$ は自明．
(Dii) $d^*(x^*,x^*)=0$ となる事は明らか．逆に $d^*(x^*,y^*)=0$ のとき，$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0$ だから $x^*=y^*$ となる．
(Diii) $d^*(x^*,y^*)=d^*(y^*,x^*)$ は自明．
(Div) $d^*(x^*,y^*)>d^*(x^*,z^*)+d^*(z^*,y^*)$ となる x^*,y^*,z^* が存在したとする．$d^*(x^*,z^*)+d^*(z^*,y^*)+\varepsilon<d^*(x^*,y^*)$ となる $\varepsilon>0$ をとり，

$$d^*(x^*,y^*)-d(x_n,y_n)<\varepsilon/4, d(x_n,z_n)-d^*(x^*,z^*)<\varepsilon/4, d(z_n,y_n)-d^*(z^*,y^*)<\varepsilon/4 \qquad (n\ge N)$$

となる N をとる．このとき

$$d(x_n,z_n)+d(z_n,y_z)<d^*(x^*,z^*)+d^*(z^*,y^*)+\frac{\varepsilon}{2}\le d^*(x^*,y^*)-\frac{\varepsilon}{4}<d(x_n,y_n)$$

となり三角不等式に反する．従って任意の x^*,y^*,z^* に対して $d^*(x^*,y^*)\le d^*(x^*,z^*)+d^*(z^*,y^*)$ となる．

以上より d^* は距離関数となる事が確かめられた．□

p. 274 3. 省略．

p. 274 4. (S,d) をコンパクトな距離空間とし，$\mathscr{U}$ を S の任意の開被覆とする．そのとき次の性質を満たす正数 $\tau=\tau(\mathscr{U})$ が存在する事を示せ：

$\delta(M)<\tau$ であるような S の任意の部分集合 M は必ず $\mathscr{U}$ の少なくとも 1 つの元に含まれる．

解答 各 $x \in S$ に対して $U_{\varepsilon(x)}(x) \subset U$ となる $U \in \mathscr{U}$ 及び $\varepsilon(x) > 0$ が存在する．仮定より開被覆 $\{U_{\varepsilon(x)/2}(x)\}_{x \in S}$ の有限部分被覆 $\{U_{\varepsilon(x_i)/2}(x_i)\}_{i=1,\cdots,n}$ をとり，$\tau = \min\{\varepsilon(x_i)/2 : i = 1, \cdots, n\}$ とする．部分集合 $M \subset S$ について $\delta(M) < \tau$ だとする．$x \in M$ をとり，$x \in U_{\varepsilon(x_i)/2}(x_i)$ となる i をとる．このとき任意の $y \in M$ について

$$d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) \leq \delta(M) + \varepsilon(x_i)/2 \leq \tau + \varepsilon(x_i)/2 \leq \varepsilon(x_i),$$

従って $M \subset U_{\varepsilon(x_i)}(x_i)$ となる．$U_{\varepsilon(x_i)}(x_i)$ は或る $U \in \mathscr{U}$ に含まれるので，$M \subset U$，即ち M は $\mathscr{U}$ の或る元に含まれる． □

p. 274 5. (S, d) をコンパクトな距離空間とし，$\mathscr{F}$ を S の有限個の閉集合から成る集合族とする．そのとき次の性質を満たす正数 $\sigma = \sigma(\mathscr{F})$ が存在する事を示せ：

$\delta(M) < \sigma$ であるような S の或る部分集合 M が $\mathscr{F}$ の部分集合 $\mathscr{F}'$ の各元と交わるならば，$\bigcap \mathscr{F}' \neq \varnothing$.

(σ を $\mathscr{F}$ の **Lebesgue 数**という,)

解答 $\bigcap \mathfrak{F} \neq \varnothing$ ならば σ として任意の正数をとればよい．$\bigcap \mathfrak{F} = \varnothing$ のとき，$\Omega = \{\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F} : \bigcap \mathfrak{F}' = \varnothing\}$ と置く．仮定より $\Omega \neq \varnothing$ である．$\mathfrak{F}' \in \Omega$ に対し $\mathscr{U}_{\mathfrak{F}'} = \{U^c \in \mathfrak{P}(S) : U \in \mathfrak{F}'\}$ と置く．$\mathscr{U}_{\mathfrak{F}'}$ は S の開被覆であり，これに対し前問の条件を満たす正数 $\tau(\mathfrak{F}')$ をとり，$\sigma = \min\{\tau(\mathfrak{F}') : \mathfrak{F}' \in \Omega\}$ とする．S の部分集合 M が $\delta(M) < \sigma$ を満たし，更に $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$ について $F \cap M \neq \varnothing$ $(F \in \mathfrak{F}')$ だとする．$\bigcap \mathfrak{F}' = \varnothing$ だとすると $\mathfrak{F}' \in \Omega$, $\delta(M) < \tau(\mathfrak{F}')$ だから $M \subset F^c$ となる $F \in \mathfrak{F}'$ が存在するが，これは $\mathfrak{F}'$ に対する仮定に反する．故に $\bigcap \mathfrak{F}' \neq \varnothing$ となる． □

p. 274 6.* 一般の集合 X 上のフィルター $\mathfrak{F}$ に対し，$\mathfrak{F} \subsetneq \mathfrak{F}'$ となるような X 上のフィルター $\mathfrak{F}'$ が存在しないとき，$\mathfrak{F}$ は X 上の**極大フィルター**であるという．この概念について次の事を証明せよ．

(a) 有限交叉性を持つ X の部分集合系ならば，$\mathfrak{X}$ を含む X 上の極大フィルターが存在する．
(b) $\mathfrak{F}$ が X 上の極大フィルターで，A が $\mathfrak{F}$ の全ての元 F と交わる X の部分集合ならば $A \in \mathfrak{F}$ である．
(c) $\mathfrak{F}$ が X 上の極大フィルターならば，X の任意の部分集合 A に対して A または A^c のいずれか一方は $\mathfrak{F}$ に属する．

解答 (a) $\mathfrak{X}$ を含む filter 全体を $\mathscr{F}$ とする．$\mathscr{F}$ は $\varnothing$ ではない．

(証明) $\mathfrak{X}$ の有限個の共通部分を含む X の部分集合全体を $\tilde{\mathfrak{X}}$ とする．

(i) $\varnothing \in \tilde{\mathfrak{X}}$ だとすると $S_1 \cap \cdots \cap S_n \subset \varnothing$ となる $S_1, \cdots, S_n \in \mathfrak{X}$ が存在するが，これは $\mathfrak{X}$ の有限交叉性に反する．

(ii) (iii) 定義より明らか. ■

$\mathscr{S}$ を $\mathscr{F}$ の全順序部分集合に対し，$\mathfrak{S} = \bigcup \mathscr{S}$ とする．

(i) $\varnothing \in \mathfrak{S}$ だとすると $\varnothing \in \mathfrak{S}'$ となる $\mathfrak{S}' \in \mathscr{S}$ が存在するが，これは $\mathfrak{S}'$ が filter である事に反する．
(ii) $A \in \mathfrak{S}$ 及び $A \subset A'$ となる $A' \subset X$ があったとする．$A \in \mathfrak{S}'$ となる $\mathfrak{S}' \in \mathscr{S}$ をとれば $A' \in \mathfrak{S}'$，従って $A' \in \mathfrak{S}$ となる．
(iii) $A, B \in \mathfrak{S}$ のとき $A, B \in \mathfrak{S}'$ となる $\mathfrak{S}' \in \mathscr{S}$ が存在し，$A \cap B \in \mathfrak{S}'$ より $A \cap B \in \mathfrak{S}$ となる．

$\mathfrak{F} \subset \mathfrak{S}$ だから $\mathfrak{S} \in \mathscr{F}$ であり, 定義より $\mathscr{S}$ の上界となる．従って $\mathscr{F}$ は $\varnothing$ ではない帰納的順序集合だから，Zorn の補題より極大元 $\mathfrak{F}$ が存在．$\mathfrak{F}$ が $\mathfrak{X}$ を含む極大フィルターである事は明らか.

(b) 仮定より $\mathfrak{F} \cup \{A\}$ は有限交叉性を持つから，(a) より $\mathfrak{F} \cup \{A\}$ を含むフィルター $\mathfrak{F}'$ が存在．$\mathfrak{F}$ は極大フィルターだから $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$，特に $A \in \mathfrak{F}$ となる．

(c) $A \notin \mathfrak{F}$ だとする．$A^c \cap F = \varnothing$, 即ち $F \subset A$ となる $F \in \mathfrak{F}$ が存在すると $A \in \mathfrak{F}$ となり仮定に反する．従って任意の $F \in \mathfrak{F}$ に対し $A^c \cap F \neq \varnothing$ となり，(b) より $A^c \in \mathfrak{F}$ となる． □

p. 274　7.* 　S を一般の位相空間とする．S に関する次の 3 条件は互いに同値である事を証明せよ．
(i)　S はコンパクトである．
(ii)　S 上の任意の極大フィルター $\mathfrak{F}$ に対して $\bigcap\{F^a : F \in \mathfrak{F}\} \neq \varnothing$.
(iii)　S 上の任意の極大フィルターは収束する．

解答 (i) $\Rightarrow$ (ii)　$\bigcap_{F\in\mathfrak{F}} F^a = \varnothing$ となる極大フィルター $\mathfrak{F}$ が存在したとする．このとき $\{F^{ac}\}_{F\in\mathfrak{F}}$ は X の開被覆となるから，仮定より有限開被覆 $\{F_i^{ac}\}_{i=1,\cdots,n}$ が存在．このとき $\bigcap_{i=1}^n F_i = \varnothing$ となるが，これは $\mathfrak{F}$ の有限交叉性に反する．
(ii) $\Rightarrow$ (iii)　$\mathfrak{F}$ を極大 filter だとする．(ii) より $x \in F^a$　$(F \in \mathfrak{F})$ となる $x \in S$ が存在．x の任意の近傍 N に対し $N \cap F \neq \varnothing$ となるから $N \in \mathfrak{F}$ となる (前問 (b))．従って $\mathfrak{F}$ は x に収束する (収束の定義は [松坂] 第 6 章 §1 問題 14 参照)．
(iii) $\Rightarrow$ (ii)　極大フィルター $\mathfrak{F}$ が x に収束したとき，x の任意の近傍 N は $\mathfrak{F}$ に属するから $N \cap F \neq \varnothing$ $(\forall F \in \mathfrak{F})$．従って $x \in F^a$ となり，$x \in \bigcap_{F\in\mathfrak{F}} F^a$ となる．(ii) $\Rightarrow$ (i)　有限部分被覆を持たない S の開被覆 $\mathfrak{U}$ が存在したとし，$\mathfrak{U}$ に対して $\mathfrak{X} = \{F \in \mathfrak{P}(X) : F^c \in \mathfrak{U}\}$ と置く．仮定より $\mathfrak{X}$ は有限交叉性を持つから，前問 (a) より $\mathfrak{X}$ を含む極大フィルター $\mathfrak{F}$ が存在．仮定より $x \in F^a$ $(F \in \mathfrak{F})$ となる $x \in S$ が存在．特に $x \in F$　$(F \in \mathfrak{X})$，$x \notin U$　$(U \in \mathfrak{U})$ となるが，これは $\mathfrak{U}$ が S の開被覆である事に反する．故に S はコンパクトである．□

p. 275　8.* 　S を位相空間とする．次の性質 $(*)$ を満たす S の有向点列 $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を**完全有向点列**という：

$(*)$　S の任意の部分集合 M が与えられたとき，ある $\alpha_0 \in A$ が存在して，$\alpha \geq \alpha_0$ であるような全ての α に対して $a_\alpha \in M$ となるか，または，或る $\alpha_1 \in A$ が存在して $\alpha \geq \alpha_1$ であるような全ての α に対して $a_\alpha \in M^c$ となる．

$\mathfrak{F}$ を S 上の極大フィルターとする．$\mathfrak{F}$ の元 F_1, F_2 に対し $F_1 \supset F_2$ であるとき，$F_1 \leq F_2$ とすれば，$(\mathfrak{F}, \leq)$ は有向集合となる．そのとき各 $F \in \mathfrak{F}$ に対して $a_F \in F$ を選出すれば，$\{a_F\}_{F\in\mathfrak{F}}$ は完全有向点列である事を証明せよ．

解答 任意の部分集合 $M \subset S$ について，問題 6 (c) より $M \in \mathfrak{F}$ または $M^c \in \mathfrak{F}$ が成立．前者の場合，$M \leq F$ ならば $F \subset M$ だから $a_F \in M$，後者の場合，$M^c \leq F$ ならば $F \subset M^c$ だから $a_F \in M^c$ となる．□

p. 275　9.* 　位相空間 S がコンパクトである事は，S の任意に完全有向点列が収束する事とも同値である事を証明せよ．

解答 S がコンパクトだとする．完全有向点列 $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に対し $a_\alpha \in F$ $(\alpha \geq \alpha_0)$ となる $\alpha_0 \in A$ が存在するような S の部分集合 F の全体 $\mathfrak{F}$ はフィルターであり ([松坂] 第 6 章 §1 問題 15 (p.246))，$\mathfrak{F}$ を含む極大フィルター $\mathfrak{F}'$ をとれば (問題 6)，仮定より $\mathfrak{F}'$ は或る $a \in S$ に収束する．a の近傍 U に対し $a_\alpha \in U^c$　$(\alpha \geq \alpha_1)$ となる $\alpha_1 \in A$ が存在したとすると，定義より $U^c \in \mathfrak{F}$．このとき $\varnothing = U \cap U^c \in \mathfrak{F}'$ となり矛盾．従って $a_\alpha \in U$　$(\alpha \geq \alpha_1)$ となる $\alpha_1 \in A$ が存在，即ち $\{a_\alpha\}$ は a に収束する．

逆に S の完全有向点列が常に収束したとする．$\mathfrak{F}$ を S の極大フィルターとすると，前問の構成法より完全有向点列 $\{a_F\}_{F\in\mathfrak{F}}$ を得る．仮定より $\{a_F\}$ は或る $a \in S$ に収束．a の近傍 U に対し $a_F \in U$　$(F \subset F_0)$ となる $F_0 \in \mathfrak{F}$ が存在．任意の $F \in \mathfrak{F}$ に対し $F' \subset F_0 \cap F$ となる $F' \in \mathfrak{F}$ が存在し，$a_{F'} \in U \cap F' \subset U \cap F$ より $U \cap F \neq \varnothing$ となる．故に問題 6 (b) より $U \in \mathfrak{F}$．従って $\mathfrak{F}$ は a に収束する．□