§6.3　距離空間の一様位相的性質

p. 263　1.　距離空間の間の一様同相関係は同値関係である事を示せ.

解答 S, S' が一様同相なとき，$S \sim S'$ と記す事にする.

反射律： 恒等射 1_S について $d(1_S(x), 1_S(y)) = d(x, y) \quad (x, y \in S)$ だから $S \sim S$ となる.
対称律： $f : S \to S'$ が一様同相写像ならば $f^{-1} : S' \to S$ も一様同相写像だから，$S \sim S'$ ならば $S' \sim S$ となる.
推移律： $f : S \to S'$，$f' : S' \to S''$ を一様同相写像とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し $d'(x, y) < \varepsilon' \ \Rightarrow\ d''(f'(x), f'(y)) < \varepsilon$ となる $\varepsilon' > 0$ が存在する．　更に $d(x, y) < \delta \ \Rightarrow\ d'(f(x), f(y)) < \varepsilon'$ となる $\delta > 0$ が存在し，$d(x, y) < \delta \ \Rightarrow\ d''(f'(f(x)), f'(f(y))) < \varepsilon$ が成立．従って $f' \cdot f$ も一様連続写像となる．同様の議論により $(f' \cdot f)^{-1} = f^{-1} \cdot (f')^{-1}$ も一様連続となる事が分かる．故に $S \sim S''$ となる.　□

p. 263　2.　集合 $S\ (\neq \varnothing)$ で定義された 2 つの距離関数 d_1, d_2 が一様同値であるとは，恒等射 1_S が (S, d_1) から (S, d_2) への一様同相写像となる事をいう．d_1, d_2 が一様同値である為には，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，適当な $\delta > 0$ を選べば,

$$d_1(x, y) < \delta \ \Rightarrow\ d_2(x, y) < \varepsilon, \qquad \text{および} \qquad d_2(x, y) < \delta \ \Rightarrow\ d_1(x, y) < \varepsilon$$

の成り立つ事が必要十分である事を示せ.

解答 $1_S(x) = x,\ 1_S^{-1}(y) = y$ である事と一様連続の定義より明らか.　□

p. 263　3.　$\mathbb{R}^n$ 上の距離関数

$$d^{(n)}(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

$$d_1^{(n)}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

$$d_\infty^{(n)}(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \cdots, n\}.$$

はいずれも一様同値である事を示せ.

解答 $d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y)$　([松坂] 第 6 章 §1 問題 3 (p.245)) が成立．$\varepsilon > 0$ に対し

$$d_2(x, y) < \varepsilon \ \Rightarrow\ d_\infty(x, y) < \varepsilon, \qquad d_1(x, y) < \varepsilon \ \Rightarrow\ d_2(x, y) < \varepsilon,\ d_\infty(x, y) < \varepsilon,$$

$$d_\infty(x, y) < \frac{\varepsilon}{n} \quad \Rightarrow \quad d_2(x, y) < \varepsilon,\ d_1(x, y) < \varepsilon$$

より d_1, d_2, d_∞ は互いに一様同値である.　□

p. 263　4.　集合 S 上の距離関数 d は §2 問題 4 で定義した距離関数 d' とは一様同値である事を示せ．また集合 S 上の距離関数 d は §2 問題 5 で定義した距離関数 d'' とは一様同値である事を示せ.

解答 $\varepsilon > 0$ に対し $0 < \delta < \varepsilon$ となる δ をとれば，$d(x, y) < \delta$ のとき

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \leq d(x, y) < \delta < \varepsilon.$$

$0 < \delta < \min\{1, \varepsilon/(1+\varepsilon)\}$ となる δ をとれば，$d'(x,y) < \delta$ のとき

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < \delta, \quad (1-\delta)d(x,y) < \delta, \quad d(x,y) < \frac{\delta}{1-\delta}.$$

$\delta < \varepsilon/(1+\varepsilon)$ より $d(x,y) < \varepsilon$ となる．故に d, d' は一様同値である．

$0 < \varepsilon \le 1$ のとき，$d(x,y) < \varepsilon$ ならば $d''(x,y) = d(x,y) < \varepsilon$，$d''(x,y) < \varepsilon$ ならば $d(x,y) = d''(x,y) < \varepsilon$ となる．$1 < \varepsilon$ のとき，$d(x,y) < 1$ ならば $d''(x,y) = d(x,y) < \varepsilon$．一方，$d''(x,y) < 1$ だとすると $d(x,y) = d''(x,y) < 1 < \varepsilon$ となる． □

p. 263 5. 集合 S で定義された 2 つの同値な距離関数で一様同値ではない例を挙げよ．

解答 d を絶対値より誘導される $(0,\infty)$ 上の距離とし，

$$d'(x,y) = d(1/x, 1/y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \qquad (x, y \in (0,\infty))$$

とする．d' が $(0,\infty)$ 上の距離となる事は容易に確かめられる．$x, y \in (0,\infty)$ とする．$0 < m \le x, y \le M$ となる m, M を固定する．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$d(x,y) < m^2\varepsilon \quad \Rightarrow \quad d'(x,y) \le \frac{d(x,y)}{m^2} < \varepsilon,$$
$$d'(x,y) < \varepsilon/M^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d(x,y)}{M^2} \le \frac{d(x,y)}{xy} = d'(x,y) < \frac{\varepsilon}{M^2}, \quad \therefore\ d(x,y) < \varepsilon$$

が成立．従って d と d' は同値である．一方，$x_n = 2^{-n}$ とすると

$$d(x_n, x_{n-1}) = \frac{1}{2^n}, \qquad d'(x_n, x_{n-1}) = 2^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

となる． 正数 $\varepsilon > 0$ を一つ固定し，$\varepsilon < 2^{l-1}$ となる l を一つとる． 任意の正数 δ に対し $1 < 2^m\delta$，$l \le m$ となる m をとれば，$m < n$ のとき $d(x_{n,n-1}) = 2^{-n} < \delta$ かつ $d'(x,y) = 2^{n-1} > \varepsilon$ が成立． 従って如何なる $\delta > 0$ をとっても $d(x,y) < \delta \ \Rightarrow\ d'(x,y) < \varepsilon$ となる事はない．故に d と d' は一様同値ではない． □

p. 263 6. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の元 (x,y) に $x+y$ を対応させる写像は，$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への一様連続写像であるが，(x,y) に対して xy を対応される写像は一様連続ではない事を示せ．

解答 前者の写像を $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，後者の写像を $m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) < \varepsilon/\sqrt{2}$ のとき，

$$|a(x_1,y_1) - a(x_2,y_2)| \le |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \le \sqrt{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = \sqrt{2}d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) < \varepsilon.$$

故に a は一様連続である．一方，m が一様連続であるとする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) < \delta \quad \Rightarrow \quad |m(x_1,y_1) - m(x_2,y_2)| < \varepsilon \tag{6.1}$$

となる $\delta > 0$ が存在．ここで $x_1 + y_1 > 2\varepsilon/\delta$ となる x_1, y_1 をとり，$x_2 = x_1 + \delta/2$，$y_2 = y_1 + \delta/2$ とすると

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = \frac{\delta^2}{2}$$

より $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))^2 < \delta$ となるが，

$$|m(x_1,y_1) - m(x_2,y_2)| = |x_1y_1 - x_2y_2| > \varepsilon + \frac{\delta^2}{4} > \varepsilon$$

となり，(6.1) に反する．故に m は一様連続ではない． □

p. 263　7.　(S,d) を任意の距離空間とするとき，$d : S \times S \to \mathbb{R}$ は一様連続である事を証明せよ．

解答　三角不等式より $x, x', y, y' \in S$ に対し

$$d(x,y) \le d(x,x') + d(x',y') + d(y',y), \qquad d(x',y') \le d(x',x) + d(x,y) + d(y,y')$$

より $|d(x,y) - d(x',y')| \le d(x,x') + d(y,y')$ が成立．これと $d(x,x') + d(y,y') \le \sqrt{2}\sqrt{d(x,x')^2 + d(y,y')^2}$ より，任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$d((x,y),(x',y')) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad |d(x,y) - d(x',y')| < \sqrt{2}\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = \varepsilon$$

となる．故に d は一様連続である．　□

p. 263　8.　完備距離空間に一様同相な距離空間は完備である事を示せ．

解答　S を完備距離空間，$f : S \to S'$ を一様同相写像とする．$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を S' の Cauchy 列とし，$x_n = f^{-1}(y_n)$ と置く．f について，任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$d(x,x') < \delta \quad \Rightarrow \quad d'(f(x),f(x')) < \varepsilon, \qquad d'(y,y') < \delta \quad \Rightarrow \quad d(f^{-1}(y),f^{-1}(y')) < \varepsilon$$

となる $\delta > 0$ をとる．$\delta > 0$ に対し $d'(y_m,y_n) < \delta$ $(m,n \ge N)$ となる N をとるとき，$m,n \ge N$ ならば $d'(x_m,x_n) < \varepsilon$. 故に $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列となる．S の完備性より $x_n \to x$ となる $x \in S$ が存在．特に $d(x_n,x) < \delta$ $(n \ge N')$ となる N' をとれば $n \ge N'$ のとき $d'(y_n,f(x)) = d'(f(x_n),x_n) < \varepsilon$，故に $y_n \to f(x)$ となる．従って S' も完備である．　□

p. 263　9.　S を完備距離空間とするとき，S の部分集合 M が部分距離空間として完備である為には，M が閉集合である事が必要十分である．この事を証明せよ．

解答　M は完備だとする．$x \in M^a$ に対し $x_n \to x$ かつ $x_n \in M$ となる点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する．$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は M 内の Cauchy 列だから，M の完備性より $x_n \to x'$ となる $x' \in M$ が存在．S は Hausdorff 空間だから $x = x' \in M$ となる．

逆に M は閉集合だとする．$\{x_n\}$ を M の Cauchy 列とする．$\{x_n\}$ は S の Cauchy 列でもあるから，S の完備性より $x_n \to x$ となる $x \in S$ が存在．x は M の触点となるから $x \in M^a = M$．従って M は完備である．　□

p. 263　10.　距離空間 S_1, S_2 の直積距離空間を $S = S_1 \times S_2$ とする．次の事を証明せよ．

(a)　$S = S_1 \times S_2$ の点列 $\{(a_n^{(1)}, a_n^{(2)})\}$ が Cauchy 点列である為には $\{a_n^{(1)}\}$, $\{a_n^{(2)}\}$ がそれぞれ S_1, S_2 の Cauchy 点列である事が必要十分である．

(b)　$S = S_1 \times S_2$ が完備である為には S_1, S_2 が共に完備である事が必要十分である．

解答　(a)　$\{(a_n^{(1)}, a_n^{(2)})\}$ が Cauchy 列だとすると

$$d_1(a_n^{(i)}, a_m^{(i)}) \le d((a_n^{(1)}, a_n^{(2)}), (a_m^{(1)}, a_m^{(2)})) \ \to\ 0 \quad (n, m \to \infty,\ i = 1, 2) \tag{6.1}$$

だから $\{a_n^{(i)}\}$ は Cauchy 列となる．逆に $\{a_n^{(i)}\}$ が Cauchy 列だとすると，

$$d((a_n^{(1)}, a_n^{(2)}), (a_m^{(1)}, a_m^{(2)})) \le d_1(a_n^{(1)}, a_m^{(1)}) + d_1(a_n^{(2)}, a_m^{(2)}) \ \to\ 0 \quad (n, m \to \infty) \tag{6.2}$$

より $\{(a_n^{(1)}, a_n^{(2)})\}$ も Cauchy 列である．

(b)　S は完備だとする．S_1 の Cauchy 列 $\{a_n^{(1)}\}$ が与えられたとする．$y \in S_2$ を一つ固定し，$a_n^{(2)} = y$ とすれば $\{a_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は S_2 の収束列，特に Cauchy 列となり，(a) より $\{(a_n^{(1)}, a_n^{(2)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ は S の Cauchy 列となる．仮定より $(a_n^{(1)}, a_n^{(2)}) \to (x_1, x_2)$ となる $x_i \in S_i$ $(i = 1, 2)$ が存在する．不等式 (6.1) で $m \to \infty$ とすれば $a_n^{(1)} \to x_1$ となる．従って S_1 は完備である．S_2 についても同様．

逆に S_1, S_2 が完備だとする．S の Cauchy 列 $\{(a_n^{(1)}, a_n^{(2)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられるとき，不等式 (6.1) より $\{a_n^{(1)}\}, \{a_n^{(2)}\}$ は共に Cauchy 列となる．仮定より $a_n^{(i)} \to x_i$ となる $x_i \in S_i$ が存在．不等式 (6.2) で $m \to \infty$ とすれば $(a_n^{(1)}, a_n^{(2)}) \to (x_1, x_2)$, 従って S も完備となる． □

p. 263　11.　Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ は完備である事を示せ．

解答　$\{x_n\}$ $(x_n = (x_n^1, \cdots, x_n^n))$ を $\mathbb{R}^n$ の Cauchy 列とする．$|x_n^i - x_m^i| \leq \|x_n - x_m\|$ より第 i 成分からなる数列 $\{x_n^i\}$ は $\mathbb{R}$ の Cauchy 列となる．$\mathbb{R}$ は完備だから ([松坂] 第 6 章 §3 定理 8 (p.257))，この数列は収束する．x^i をその極限とし，$x = (x^1, \cdots, x^n)$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し $|x_n^i - x^i| < \varepsilon/2\sqrt{n}$ $(n \geq n_0)$ となる n_0 が存在し，このとき

$$d(x_n, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_n^i - x^i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\varepsilon^2/4n)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad (\forall\ n \geq n_0),$$

即ち，$\{x_n\}$ は x に収束する．よって $\mathbb{R}^n$ の任意の Cauchy 列は収束列である事が分かり，故に $\mathbb{R}^n$ は完備となる． □

p. 263　12.　距離空間 S の Cauchy 点列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が点 a に収束する部分列を含むならば，$\{a_n\}$ 自身が同じ極限 a に収束する事を証明せよ．

解答　部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が点 a に収束したとする．任意の $\varepsilon > 0$ について，$\{a_n\}$ が Cauchy 列である事より $d(a_n, a_m) < \varepsilon/2$ $(m, n \geq N_0)$ となる N_0 をとる．また $d(a_{n_k}, a) < \varepsilon/2$ $(k \neq K)$ となる K をとる．ここで $N > \max\{N_0, n_K\}$ となる N をとる．$n \geq N$ に対し $n_k \geq n$ となる k をとると，$k \geq K$ だから

$$d(a_n, a) \leq d(a_n, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

従って $a_n \to a$ である． □

p. 263　13.　全有界な距離空間に一様同相な距離空間は全有界である事を示せ．

解答　S を全有界な距離空間とし，S' を距離空間，$f : S \to S'$ を一様同相写像とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し $d(x, y) < \delta \ \Rightarrow\ d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ となる $\delta > 0$ をとり，$U \in \mathscr{U} \ \Rightarrow\ \delta(U) < \delta$ となる S の有限開被覆 $\mathscr{U}$ をとる．$f_*\mathscr{U} = \{f(U) \subset S' : U \in \mathscr{U}\}$ は S' の有限開被覆であり，$\delta(f(U)) < \varepsilon$ $(U \in \mathscr{U})$ となる．故に S' は全有界である． □

p. 264　14.　Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の有界な部分集合は全有界である事を証明せよ．

解答　有界集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対し，その閉包 A^a はコンパクトだから，任意の $\varepsilon > 0$ について，開被覆 $\{U_{\varepsilon/4}(x)\}_{x\in A^a}$ は有限被覆 $\{U_{\varepsilon/4}(x_i)\}_{i=1,\cdots,n}$ を持つ．このとき $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\varepsilon/4}(x_i)$ かつ $\delta(U_{\varepsilon/4}(x_i)) = \varepsilon/2 < \varepsilon$ となる．故に A は全有界である． □

p. 264　15.　距離空間 (S, d) の部分集合 M が (S, d) の ε 網 (ε は或る与えられた正数) であるとは，S の任意の点 x に対して $d(x, M) < \varepsilon$ が成り立つ事をいう．S が全有界である為には，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，必ず (S, d) の有限な ε 網が存在する事が必要十分である事を証明せよ．

解答 S が全有界だとする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し ε 開球体からなる S の有限開被覆 $\{U_\varepsilon(x_i)\}_{i=1,\cdots,n}$ が存在．ここで $M = \{x_1, \cdots, x_n\}$ とすれば M は ε 網である．逆に任意の $\varepsilon > 0$ に対し有限な ε 網が存在したとする $\varepsilon > 0$ に対し有限な $\varepsilon/3$ 網 M をとれば $\{U_{\varepsilon/3}(x)\}_{x \in M}$ は S の有限開被覆であり，$\delta(U_{\varepsilon/3}(x)) = 2\varepsilon/3 < \varepsilon$ となる． □

p. 264 16. 距離空間 S_1, S_2 の直積距離空間 $S = S_1 \times S_2$ が全有界である為には，S_1, S_2 が共に全有界である事が必要十分である事を示せ．

解答 $\varepsilon > 0$ とする．S が全有界だとすると，前問より有限な ε 網 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\cdots,n}$ が存在．$M_1 = \{x_1, \cdots, x_n\}$，$M_2 = \{y_1, \cdots, y_n\}$ とする．$y \in S_2$ を一つ固定するとき，任意の $x \in S_1$ に対し $d((x,y),(x_i,y_i)) < \varepsilon$ となる i をとれば $d(x, x_i) \leq d((x,y),(x_i,y_i)) < \varepsilon$．従って M_1 は S_1 の ε 網となる．M_2 も同様．逆に S_1, S_2 が全有界だとする．再び前問より有限な $\varepsilon/\sqrt{2}$ 網 $M_1 \subset S_1$，$M_2 \subset S_2$ がとれる．任意の $(x,y) \in S$ に対し $d(x,x') < \varepsilon/\sqrt{2}$，$d(y,y') < \varepsilon/\sqrt{2}$ となる $x' \in M_1$，$y' \in M_2$ が存在．

$$d((x,y),(x',y')) = \sqrt{d(x,x')^2 + d(y,y')^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$$

となるから $M_1 \times M_2$ は $S_1 \times S_2$ の ε 網となる．再び前問より $S_1 \times S_2$ は全有界となる． □