§6.2　距離空間の正規性

p. 251　1.　A, B を距離空間 S の部分集合とするとき,

$$\delta(A \cup B) \leq d(A, B) + \delta(A) + \delta(B)$$

を示せ．ここで $d(A, B)$, $\delta(A)$ は次で定義する：

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}, \qquad \delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

解答　$x, y \in A \cup B$ とする．$x, y \in A$ のときは $d(x, y) \leq \delta(A) \leq d(A, B) + \delta(A) + \delta(B)$, 同様に $x, y \in B$ のときも $d(x, y) \leq d(A, B) + \delta(A) + \delta(B)$ となる．$x \in A$, $y \in B$ だとする．このとき任意の $x' \in A$, $y' \in B$ に対し

$$d(x, y) \leq d(x', y') + d(x, x') + d(y', y) \leq d(x', y') + \delta(A) + \delta(B)$$

となるから,

$$d(x, y) \leq \inf_{(x', y') \in A \times B} d(x', y') + \delta(A) + \delta(B) = d(A, B) + \delta(A) + \delta(B)$$

となる．　□

p. 252　2.　$A_1, \ldots, A_k$ を距離空間 S の有界部分集合とすれば, $A_1 \cup \cdots \cup A_k$ も有界である事を示せ．

解答　問題 **1** と $\delta(A_i) < \infty$ より

$$\delta(A_1 \cup \cdots \cup A_k) \leq \sum_{i=1}^{k-1} d(A_1 \cup \cdots \cup A_j, A_{j+1}) + \delta(A_1) + \cdots + \delta(A_k) < \infty.$$

故に $A_1 \cup \cdots \cup A_k$ は有界である．　□

p. 252　3.　A を距離空間 S の部分集合, x を S の点とするとき, 次の事を示せ．

(a)　$x \in A^i \;\Leftrightarrow\; d(x, A^c) > 0$.

(b)　$x \in A^e \;\Leftrightarrow\; d(x, A) > 0$.

(c)　$x \in A^f \;\Leftrightarrow\; d(x, A) = 0$ かつ $d(x, A^c) = 0$.

解答　(a)　$x \in A^i$ ならば $B(x; \varepsilon) \subset A$ となる $\varepsilon > 0$ が存在．任意の $y \in A^c$ に対し $d(x, y) \geq \varepsilon$ より $d(x, A^c) \geq \varepsilon > 0$ となる．逆に $d(x, A^c) > 0$ だとすると $d(x, A^c) \geq \varepsilon > 0$ となる ε が存在．このとき $d(x, y) < \varepsilon$ ならば $y \notin A^c$, 従って $y \in A$ となるから $B(x; \varepsilon) \subset A$, $x \in A^i$ となる．

(b)　$x \in A^e$ ならば $B(x; \varepsilon) \subset A^c$ となる $\varepsilon > 0$ が存在．任意の $y \in A$ に対し $d(x, y) \geq \varepsilon$ より $d(x, A) \geq \varepsilon > 0$ となる．逆に $d(x, A) > 0$ だとすると $d(x, A) \geq \varepsilon > 0$ となる ε が存在．このとき $d(x, y) < \varepsilon$ ならば $y \notin A$, 従って $y \in A^c$ となるから $B(x; \varepsilon) \subset A^c$, $x \in A^e$ となる．

(c)　$x \in A^f$ ならば $x \notin A^i$ より $d(x, A^c) = 0$．$x \in A^e$ より $d(x, A) = 0$ となる．逆に $d(x, A^c) = 0$ かつ $d(x, A) = 0$ ならば $x \notin A^i$, $x \notin A^e$．$S = A^i \cup A^f \cup A^e$ より $x \in A^f$ となる．　□

p. 252　4.　集合 $S(\neq \varnothing)$ 上の任意の距離関数 d に対して, $d' : S \times S \to \mathbb{R}$ を

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

と定義すれば, 次の事が成り立つ事を示せ．

(a) d' は S 上の距離関数である．
(b) d' について S は有界で $\delta'(S) \leq 1$.
(c) d と d' は位相的に同値である．

解答 (a) (Di) (Dii) (Diii) は自明． $f(t) = t/(1+t)$ $(t \geq 0)$ とする． $f'(t) = 1/(1+t)^2 > 0$ より $f(t)$ は狭義単調増加．これより $x, y, z \in S$ について

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)},$$

即ち $d'(x,y) \leq d'(x,z) + d'(z,y)$. よって (Div) も成立し， d' は距離関数である．

(b) 任意の $x, y \in S$ に対し $d(x,y) < 1 + d(x,y)$ より $d'(x,y) < 1$. 従って $\delta'(S) \leq 1$ となる．
(c) d, d' の定める S 上の位相構造をそれぞれ $\mathfrak{O}, \mathfrak{O}'$ とする．また $x \in S$ を中心，$\varepsilon > 0$ を半径とする d, d' に関する開球体をそれぞれ $B(x;\varepsilon)$, $B'(x;\varepsilon)$ と記す． $d'(x,y) \leq d(x,y)$ だから $B(x;\varepsilon) \subset B'(x;\varepsilon)$. 従って $O \in \mathfrak{O}'$ ならば $O \in \mathfrak{O}$ となる．逆に $B(x;\varepsilon)$ に対し $0 < \delta < \varepsilon/(1+\varepsilon)$ (< 1) となる δ をとれば $0 < \delta/(1-\delta) < \varepsilon$ となるから， $y \in B'(x;\delta)$ に対し

$$\frac{d(x,y)}{1+\delta(x,y)} < \delta, \qquad d(x,y) < \frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon, \qquad \therefore \quad B'(x;\delta) \subset B(x;\varepsilon).$$

よって $O \in \mathfrak{O}$ ならば $O \in \mathfrak{O}'$. 従って $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}'$ となる． □

p. 252 5. 集合 $S(\neq \varnothing)$ 上の任意の距離関数 d に対して， $d'' : S \times S \to \mathbb{R}$ を

$$d''(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$$

と定義した場合，前問と同じ事が成り立つ事を示せ．

解答 (a) (Di) (Dii) (Diii) は自明． $x, y, z \in S$ に対し $1 \leq d(x,z) + d(z,y)$ のとき， $d"(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. $d(x,z), d(z,y) < 1$ ならば $d(x,z) + d(z,y) = d"(x,z) + d"(z,y)$ であり，そうでなければ $1 \leq d"(x,z) + d"(z,y)$. 一方， $d(x,z) + d(z,y) < 1$ ならば $d(x,y)$, $d(x,z)$, $d(z,y) < 1$ だから d に関する三角不等式より d' に関する三角不等式を得る．従って何れの場合にも三角不等式，即ち (Div) が成立し， $d"$ は距離関数である．

(b) 定義より $\delta"(S) \leq 1$ は自明．

(c) 半径が 1 より小さいならば $d, d"$ に関する開球体は一致する．この事から $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}"$ となる事は明らか． □

p. 252 6. A, B を距離空間 S の部分集合とするとき，

$$d(A,B) = \inf\{d(x,B) : x \in A\} = \inf\{d(A,y) : y \in B\}$$

である事を示せ．

解答 $a = \inf\{d(x,B) : x \in A\}$ とする． 任意の $x \in A$, $y \in B$ に対し $d(x,B) \leq d(x,y)$ より $a \leq d(x,y)$, 従って $a \leq d(A,B)$ となる．一方，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $d(x,B) < a + \varepsilon/2$ となる $x \in A$ が存在． また $d(x,y) < d(x,B) + \varepsilon/2$ となる $y \in B$ が存在する．このとき

$$d(x,y) < d(x,b) + \varepsilon/2 < (a + \varepsilon/2) + \varepsilon/2 = a + \varepsilon$$

だから $d(A,B) \leq a + \varepsilon$. ε は任意だから $d(A,B) \leq a$. 故に $d(A,B) = a$ となる． $d(A,B) = \inf\{d(A,y) : y \in B\}$ も同様に示される． □

p. 252 7. A を距離空間 S の部分集合とするとき， $\delta(A) = \delta(A^a)$ である事を示せ．(従って A が有界ならば A^a も有界である.)

解答 $\delta(A) \leq \delta(\overline{A})$ である．$\delta(A) = \infty$ ならば $\delta(\overline{A}) = \infty$ より $\delta(A) = \delta(\overline{A})$ となる．次に $\delta(\overline{A}) < \infty$ だとする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta(\overline{A}) - \varepsilon/2 < d(x, y)$ となる $x, y \in \overline{A}$ が存在．更に $d(x, x') < \varepsilon/4$, $d(y, y') < \varepsilon/4$ となる $x', y' \in A$ が存在する．このとき

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) < d(x', y') + \varepsilon/2$$

より $\delta(\overline{A}) - \varepsilon < d(x', y') \leq \delta(A)$．$\varepsilon$ は任意だから $\delta(\overline{A}) \leq \delta(A)$ となる．以上より $\delta(A) = \delta(\overline{A})$ を得る． □

p. 252　8.　A を距離空間 S のコンパクトな部分集合とすれば，A は有界で，$\delta(A) = d(x_0, y_0)$ となる A の点 x_0, y_0 が存在する事を示せ．

解答 A はコンパクトだから，開被覆 $\{B(x;1)\}_{x \in A}$ の有限部分被覆 $\{B(x_i;1)\}_{i=1,\dots,n}$ が存在する．$x, y \in A$ に対し $x \in B(x_i;1)$，$y \in B(x_j;1)$ となる i, j をとれば

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) < 2 + \max\{d(x_k, x_l) : k, l = 1, \cdots, n\},$$

故に $\delta(A) < 2 + \max\{d(x_k, x_l) : k, l = 1, \cdots, n\}$，即ち A は有界である．次に d の $A \times A$ への制限を d_A は $A \times A$ 上の連続関数．$A \times A$ はコンパクトだから (p. 212 定理 **13**) d_A は最大値 $d(x_0, y_0)$ を持ち (p.218 定理 **16** 系 **2**)，これは $\delta(A)$ と一致する． □

p. 252　9.　A を距離空間 S のコンパクトな部分集合，B を S の任意の部分集合とするとき，$d(A, B) = d(x_0, B)$ となる A の点 x_0 が存在する事を証明せよ．

解答 $f : S \to \mathbb{R}$，$f(x) = d(x, B)$ とすれば f は連続関数となる (補題 **4**)．A はコンパクトだから f は最小値 $f(x_0)$ $(x_0 \in A)$ を持つ．$f(x_0) = d(x_0, B) = \min\{d(x, B) : x \in A\} = \inf\{d(x, B) : x \in A\}$ と問題 **6** より $d(x_0, B) = d(A, B)$ となる． □

p. 252　10.　A を距離空間 S のコンパクトな部分集合，B を S の閉集合とするとき，$A \cap B = \varnothing$ ならば $d(A, B) > 0$ である事を示せ．

解答 $d(A, B) = 0$ だとする．問題 **9** より $d(a, B) = 0$ となる $a \in A$ が存在する．更に補題 **2** と B が閉集合である事より $a \in \overline{B} = B$．よって $A \cap B \neq \varnothing$ となる． □

p. 252　11.　A, B が距離空間 S の閉集合で $A \cap B = \varnothing$ であるとき，$d(A, B) > 0$ と言えるか．

解答 $S = \mathbb{Q}$ (絶対値による距離を持つ)，$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \pi\}$，$B = \{x \in \mathbb{Q} : \pi < x\}$ とすれば A, B はそれぞれ S の閉集合であり，$A \cap B = \varnothing$ である．$n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n = \pi - 1/n$，$b_n = \pi + 1/n$ とすれば

$$a_n \in A,\ b_n \in B, \qquad d(a_n, b_n) = |a_n - b_n| = 2/n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

だから $d(A, B) = 0$．よって $A \cap B = \varnothing$ であっても $d(A, B) > 0$ になるとは限らない． □

p. 252　12.*　M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ のコンパクトな凸集合とし，$M^i \neq \varnothing$ とする．そのとき M は $\mathbb{R}^n$ の閉球体 $B^*(a;\varepsilon)$ と同相であり，その境界 M^f は球面 $S(a;\varepsilon)$ と同相である事を証明せよ．

解答 M は原点 0 を内点として含むと仮定してもよい．$\mathbb{R}^n$ の原点以外の点 x に対し 0 を端点とし x の向きを持つ半直線を l_x とする．$B^* = B^*(0;1)$ 及び M はコンパクト凸集合だから，任意の $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ に対し l_x と $S = S(0;1)$，l_x と M^f はそれぞれ 1 点で交わる ([松坂] 第 5 章 §1 問題 22 (p.208))．これらをそれぞれを $\varphi_0(x) = x/\|x\| \in S$，$\varphi_1(x) \in M^f$ と記す．

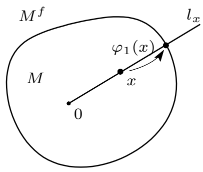

図 1

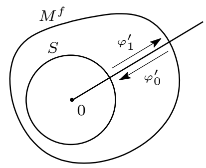

図 2

形より φ_0 は $\mathbb{R}^n - \{0\}$ から S への連続写像となる．$\varphi_0' = \varphi_0\big|_{M^f}$，$\varphi_1' = \varphi_1\big|_S$ とすれば φ_0', φ_1' は共に全単射，かつ互いの逆写像となる事が分かる．M^f がコンパクト，S が Hausdorff 空間だから，φ_0' は M^f から S への同相写像となり ([松坂] 第 5 章 §1 定理 15 (p.216))，$\varphi_1 = \varphi_1' \cdot \varphi_0$ より φ_1 も連続となる．ここで

$$\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \psi(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ x/\|\varphi_1(x)\| & (x \neq 0) \end{cases}$$

とする．$x \neq 0$ のときは φ_1 が連続だから ψ も連続．0 は M の内点だから $B(0;\varepsilon) \subset M$ となる $\varepsilon > 0$ が存在．任意の $x \in M - \{0\}$ に対し $0 < \varepsilon \leq \|\varphi_1(x)\|$ だから $\|\psi(x)\| \leq \|x\|/\varepsilon$ だから $x = 0$ のときも連続となる．ψ の M への制限はコンパクト空間 M から Hausdorff 空間 B^* への連続な全単射となるから，ψ の M への制限は M から B^* への位相同型射となる． $\square$