§6.1　距離空間とその位相

p. 244　1.　S を空ではない集合とするとき，$d : S\times \to \mathbb{R}$ が S 上の距離関数であるための 4 条件

(Di)　任意の $x, y \in S$ に対して　$d(x, y) \geq 0$.

(Dii)　$x, y \in S$ に対し　$d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のとき，またそのときに限る.

(Diii)　任意の $x, y \in S$ に対して　$d(x, y) = d(y, x)$.

(Div)　d は**三角不等式**を満足する．即ち，任意の $x, y, z \in S$ に対して

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

は (Di), (Dii) に次の条件 (Diii)$'$ を合わせたものと同等である事を示せ：

(Diii)$'$　任意の $x, y, z \in S$ に対して $d(z, x) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

解答　(Di)∼(Div)　⇒　(Di) (Dii) (Diii)$'$ は自明．逆に (Di) (Dii) (Diii)$'$ が成立したとする．(Dii) (Diii)$'$ より任意の $x, y \in X$ に対し $d(y, x) \leq d(x, y) + d(y, y) = d(x, y)$，$d(x, y) \leq d(y, x) + d(x, x) = d(y, x)$．従って $d(x, y) = d(y, x)$ となり (Diii) が成立．これと (Diii)$'$ より (Div) が導かれる．□

p. 245　2.

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \qquad d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, n\}$$

は何れも $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である事を確めよ.

解答　$d_1(x, y)$，$d_\infty(x, y)$ について，定義より (Di) (Dii) (Diii) の成立は自明．$x, y, z \in \mathbb{R}^n$ について，絶対値に関する三角不等式より

$$d_1(x, y) \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) = d_1(x, z) + d_1(z, y)$$

$$d_\infty(x, y) \leq \max_{i=1}^{n} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \leq \max_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \max_{i=1}^{n} |z_i - y_i| = d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y)$$

だから (Div) も成立．よって d_1，d_∞ は $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である．□

p. 245　3.　問題 **2** の距離関数 d_1, d_∞ はどちらも Euclid 距離 d_2 と同値である事を確めよ.

解答　$x, y \in \mathbb{R}^n$ について $\max\{|x_j - y_j| : 1 \leq j \leq n\} = |x_i - y_i|$ だとすると

$$d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n|x_i - y_i| = nd_\infty(x, y), \qquad d_\infty(x, y) \leq d(x, y) \leq \sqrt{n|x_i - y_i|^2} = \sqrt{n}d_\infty(x, y)$$

より d_∞, d_1 及び d_∞, d は同値．よって d_1 と d も同値である．□

p. 245　4.　距離空間 (S, d) の点 a と正数 ε とを与えるとき，

$$\overline{B}(a; \varepsilon) = \{x \in S : d(a, x) \leq \varepsilon\}$$

$$S(a; \varepsilon) = \overline{B}(a; \varepsilon) - B(a; \varepsilon) = \{x \in S : d(a, x) = \varepsilon\}$$

は何れも閉集合である事を示せ ($\overline{B}(a; \varepsilon)$ を**閉球体**，$S(a; \varepsilon)$ を**球面**という).

解答 仮に $x \in \overline{B^*(a;\varepsilon)} - B^*(a;\varepsilon)$ となる x が存在したとする．$x \notin B^*(a;\varepsilon)$ より $d(x,a) > \varepsilon$．一方，$x \in \overline{B^*(a;\varepsilon)}$ より $\eta = (d(x,a)-\varepsilon)/4$ に対し $B(x;\eta) \cap B^*(a;\varepsilon)$ の元 y が存在するが，

$$d(x,a) - \varepsilon \le d(x,a) - d(y,a) \le d(x,y) < (d(x,a)-\varepsilon)/4$$

となり矛盾．故に $\overline{B^*(a;\varepsilon)} = B^*(a;\varepsilon)$ となる．

$(B^*(a;\varepsilon))^c = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,a) > \varepsilon\}$ 及び $B(a;\varepsilon)$ は開集合だから，これらの和集合の補集合 $S(a;\varepsilon) = ((B^*(a;\varepsilon))^c \cup B(a;\varepsilon))^c$ は閉集合である． □

※　距離関数 d について次の三角不等式が成立する：

$$|d(x,z) - d(y,z)| \le d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y).$$

後半の不等式は自明．前半については

$$\begin{aligned} d(x,z) &\le d(x,y) + d(y,z), &\quad \therefore \quad d(x,z) - d(y,z) &\le d(x,y), \\ d(y,z) &\le d(y,x) + d(x,z), &\quad \therefore \quad d(y,z) - d(x,z) &\le d(y,x) = d(x,y) \end{aligned}$$

より得られる． □

p. 245　5.　a を距離空間 (S,d) の点，M を S の部分集合とするとき，次の事を示せ．

(a)　a が M の内点である為には $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ となる S の任意の点列 $\{a_n\}$ に対して，或る番号 n_0 が存在し，$n > n_0$ である全ての n について $a_n \in M$ となる事が必要十分である．

(b)　a が M の集積点である為には，a が全ての $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n \neq a$ であるような M の点列 $\{a_n\}$ の極限となる事が必要十分である．

(c)　M の点 a が M の孤立点である為には，a が M の点列 $\{a_n\}$ の極限として表されるときは，或る番号 n_0 が存在して，$n > n_0$ である全ての n について $a_n = a$ となる事が必要十分である．

解答 (a)（必要性）a が M の内点だとすると $B(a;\varepsilon) \subset M$ となる $\varepsilon > 0$ が存在．更に仮定より a に収束する任意の点列 $\{a_n\}$ について $a_n \in B(a;\varepsilon)$ $(\forall n \ge n_0)$ となる n_0 が存在する．このとき $a_n \in M$ $(\forall n \ge n_0)$ となる．
（十分性）$a \notin M^i$ だとすると各正整数 n に対し $d(a_n,a) < 1/n$ かつ $a_n \notin M$ となる $a_n \in S$ が存在する．$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ だから，仮定より $a_n \in M$ $(n \ge n_0)$ となる n_0 が存在するが，これは a_n のとり方に反する．よって $a \in M^i$ である．

(b)（必要性）a が M の集積点だとすると各正整数 n に対し $d(a_n,a) < 1/n$ かつ $a_n \neq a$ となる M 内の点列 $\{a_n\}$ が存在．作り方より a は $\{a_n\}$ の極限となる．
（十分性）仮定より $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ かつ $a_n \neq a$ となる M の点列 $\{a_n\}$ が存在する．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対し $a_n \in B(a;\varepsilon) \cap (M - \{a\})$ $(n \ge n_0)$ となる n_0 が存在．従って a は M の集積点である．

(c)（必要性）a が M の孤立点だとすると $B(a;\varepsilon) \cap (M - \{a\}) = \varnothing$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する．M の点列 $\{a_n\}$ が a に収束したとすると $a_n \in B(a;\varepsilon)$ $(n \ge n_0)$ となる n_0 が存在．$B(a;\varepsilon) \cap (M - \{a\}) = \varnothing$ より $a_n = a$ $(n \ge n_0)$ となる．
（十分性）a が M の孤立点ではないとすると各正整数 n に対し $a_n \in B(a;1/n) \cap (M - \{a\})$ となる点列 $\{a_n\}$ が存在する．このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ と仮定より $a_n = a$ $(n \ge n_0)$ となる n_0 が存在するが，これは a_n のとり方と矛盾する．故に a は M の孤立点である． □

p. 245　6.　距離空間 (S,d) の部分距離空間 (M,d_M) は，位相空間として (S,d) の部分位相空間である事を示せ．

解答 d に関する開集合 O' に対し $O = O' \cap M$ と置く．定義より $x \in O$ に対し $B^d(x;\varepsilon) \subset O'$ となる $\varepsilon > 0$ が存在し，

$$B^{d_M}(x;\varepsilon) = B^d(x;\varepsilon) \cap M \subset O' \cap M = O$$

だから x は O の内点となり，従って O は d_M の関する開集合である．逆に $O \subset M$ を d_M に関する開集合とするとき，任意の $x \in O$ について $B^{d_M}(x;\varepsilon_x) \subset O$ となる $\varepsilon_x > 0$ が存在する．ここで $O' = \bigcup_{x\in O} B^d(x;\varepsilon_x)$ と置けば O' は S の開集合である．$x \in O$ ならば

$$x \in B^{d_M}(x;\varepsilon_x) = B^d(x;\varepsilon) \cap M \subset O' \cap M$$

より $O \subset O' \cap M$．逆に $x \in O' \cap M$ ならば $x \in B^d(y;\varepsilon_y)$ となる $y \in O$ が存在.

$$x \in B^d(y;\varepsilon_y) \cap M = B^{d_M}(y;\varepsilon_y) \subset O$$

より $x \in O$，従って $O = O' \cap M$ となる．

従って d_M が定義する開集合は M の部分空間としての開集合と一致するから M は S の部分空間である． □

p. 245 7. 有限個の距離空間の族 (S_i, d_i) $(i = 1, \ldots, n)$ が与えられたとし，台集合の直積を $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ とする．S の 2 点 $x = (x_1, \cdots, x_n)$，$y = (y_1, \cdots, y_n)$ に対し

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2}$$

とすれば，d は S 上の距離関数となる事を確めよ．

解答 d が (Di) (Diii) を満たす事は明らか．また $d(x, x) = 0$ は自明であり，逆に $d(x, y) = 0$ だとすると $\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2 = 0$ より $d_i(x_i, y_i) = 0$，従って $x_i = y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$．故に $x = y$ となる．よって (Dii) が成立．$x, y, z \in S$ に対し Schwarz の不等式 (p.139) より

$$\begin{aligned}
d(x, y)^2 &\leq \sum_{i=1}^{n} (d_i(x_i, z_i) + d_i(z_i, y_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (d_i(x_i, z_i)^2 + d_i(z_i, y_i)^2) + 2\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, z_i) d_i(z_i, y_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (d_i(x_i, z_i)^2 + d_i(z_i, y_i)^2) + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, z_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(z_i, y_i)^2} \\
&= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(z_i, y_i)^2}\right)^2.
\end{aligned}$$

従って $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ となり (Div) が成立する．故に d は S 上の距離関数である． □

p. 245 8.

$$B^{(1)}(a_1; \varepsilon/\sqrt{n}) \times \cdots \times B^{(n)}(a_n; \varepsilon/\sqrt{n}) \subset B(a; \varepsilon) \subset B^{(1)}(a_1; \varepsilon) \times \cdots \times B^{(n)}(a_n; \varepsilon)$$

である事を確めよ．

解答 $d_\infty(x, y) = \max\{d_i(x_i, y_i) : 1 \leq i \leq n\}$ と置く．この d_∞ が (Di) (Dii) (Diii) を満たす事は明らか．また $x, y, z \in S$ について $d_\infty(x, y) = d_i(x_i, y_i)$ だとすれば

$$d_\infty(x, y) \leq d_i(x_i, z_i) + d(z_i, y_i) \leq d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y).$$

従って d_∞ は三角不等式も満たし，よって S 上の距離関数となる．この距離に関する開球体を $B_\infty(a; \varepsilon)$ $(a \in S, \varepsilon)$ とすると，定義より

$$B_\infty(a; \varepsilon) = B^{(1)}(a_1; \varepsilon) \times \cdots B^{(n)}(a_1; \varepsilon)$$

となる．x に対し

$$d(x,a)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d(x_i,a_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_\infty(x,a)^2}=\sqrt{n}d_\infty(x,a)$$

より $B_\infty(a;\varepsilon/\sqrt{n}) \subset B(a;\varepsilon)$ が分かる． 一方，$d_i(x_i,a_i) \leq d(x,a)$ $(1 \leq i \leq n)$ より $d_\infty(x,a) \leq d(x,a)$ だから $B(a;\varepsilon) \subset B_\infty(a;\varepsilon)$ が分かる． □

p. 245 9. 距離空間 S_1,S_2 の直積距離空間 $S=S_1\times S_2$ [*5] の点列 $\{(a_n^{(1)},a_n^{(2)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ と点 $(a^{(1)},a^{(2)})$ $(a_n^{(1)},a^{(1)}\in S_1,\ a_n^{(2)},a^{(2)}\in S_2)$ について

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^{(1)},a_n^{(2)})=(a^{(1)},a^{(2)}) \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}a_n^{(1)}=a^{(1)} \text{ かつ } \lim_{n\to\infty}a_n^{(2)}=a^{(2)}$$

である事を示せ.

解答 直積距離空間上の距離の定義 $d((a_n^{(1)},a_n^{(2)}),(a^{(1)},a^{(2)}))=\sqrt{d_1(a_n^{(1)},a^{(1)})+d_2(a_n^{(2)},a^{(2)})}$ より $\lim_{n\to\infty}a_n^{(i)}=a^{(i)}$ ならば $\lim_{n\to\infty}(a_n^{(1)},a_n^{(2)})=(a^{(1)},a^{(2)})$ となる． 逆に $\lim_{n\to\infty}(a_n^{(1)},a_n^{(2)})=(a^{(1)},a^{(2)})$ だとすると

$$d_1(a_n^{(1)},a^{(1)}),\ d_2(a_n^{(2)},a^{(2)}) \leq d((a_n^{(1)},a_n^{(2)}),(a^{(1)},a^{(2)}))$$

より $\lim_{n\to\infty}a_n^{(i)}=a^{(i)}$ $(i=1,2)$ となる． □

p. 246 10. (S,d) を距離空間とするとき，(S,d) の 2 つの収束点列 $\{a_n\},\{b_n\}$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}d(a_n,b_n)=d(\lim_{n\to\infty}a_n,\lim_{n\to\infty}b_n)$$

が成り立つ事を示せ． また $d: S\times S\to\mathbb{R}$ は直積距離空間 $S\times S$ から距離空間 $\mathbb{R}$ への連続写像である事を示せ.

解答 $\lim_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim_{n\to\infty}b_n=b$ と置く． 絶対値に関する三角不等式より

$$|d(a_n,b_n)-d(a,b)| \leq |d(a_n,b_n)-d(a_n,b)|+|d(a_n,b)-d(a,b)|.$$

また d に関する三角不等式より $|d(a_n,b_n)-d(a_n,b)| \leq d(b_n,b),\ |d(a_n,b)-d(a,b)| \leq d(a_n,a)$ だから

$$|d(a_n,b_n)-d(a,b)| \leq d(b_n,b)+d(a_n,a) \tag{1}$$

が成立． これより $\lim_{n\to\infty}d(a_n,b_n)=d(a,b)$ が分かる.

(a,b) を $S\times S$ の任意の点とし，$\{(a_n,b_n)\}$ を (a,b) に収束する点列とする． **問題 9** より $\lim_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim_{n\to\infty}b_n=b$ だから，不等式 (1) より $\lim_{n\to\infty}d(a_n,b_n)=d(a,b)$ となる． 従って**定理 3** (ii) (p.240) より d は (a,b) に於いて連続となる. 故に d は $S\times S$ で連続. □

[*5] d_i を S_i 上の距離とするとき，$x=(x^{(1)},x^{(2)}),y=(y^{(1)},y^{(2)})\in S_1\times S_2$ に対し $d(x,y):=\sqrt{d_1(x^{(1)},y^{(1)})+d_2(x^{(2)},y^{(2)})}$ とすれば d は $S_1\times S_2$ 上の距離となる． この距離を定義した距離空間 $(S_1\times S_2,d)$ を $(S_1,d_1),(S_2,d_2)$ の**直積距離空間**という.

※　以下の問題は今回の試験範囲とは無関係なので，解答例のみ与える (問題はいつか埋めます).

p. 246　11.*

解答 (a)　a が M の触点だとすれば，任意の $U \in \mathbf{V}(a)$ に対して $a_U \in U \cap M$ がとれる．$\{a_U\}_{U \in \mathbf{V}(a)}$ は有向集合 $\mathbf{V}(a)$ 上の有向点列であり，$U \supset V$ となる任意の $V \in \mathbf{V}(a)$ に対し $a_V \in V \cap M \subset U \cap M$ が成立．故に $\{a_U\}_{U \in \mathbf{V}(a)}$ は a に収束する M 内の有向点列となる．

逆に a に収束する M 内の有向点列 $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が存在したとすれば，任意の $U \in \mathbf{V}(a)$ について $a_\alpha \in U \quad (\alpha \geq \alpha_U)$ となる $\alpha_U \in A$ が存在．特に $a_{\alpha_0} \in U \cap M$，即ち $U \cap M \neq \varnothing$ となるから a は M の触点である．

(b)　M は閉集合だとする．$a \in S$ に対し $\lim_A a_\alpha = a$ となる M 内の有向点列 $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ がとれたとすると，a の任意の近傍 U に対し $a_\alpha \in U \quad (\alpha \geq \alpha_0)$ となる $\alpha_0 \in A$ が存在．特に $U \cap M \neq \varnothing$．従って a は M の触点となる．M は閉集合だから $a \in M$ である．

逆に M 内の有向点列の極限が M に属するとする．$a \in S$ を M の触点とすると，任意の $U \in \mathbf{V}(a)$ に対し $a_U \in U \cap M$ がとれる．$\{a_U\}_{U \in \mathbf{V}(a)}$ は a に収束する M 内の有向集合 $\mathbf{V}(a)$ 上の有向点列だから，仮定より $a \in M$．よって M は閉集合である．　$\square$

p. 246　12.*

解答　f は a で連続だとする．$\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を $\lim_A a_\alpha = a$ となる有向集合 A 上の有向点列だとする．このとき任意の近傍 $U \in \mathbf{V}(f(a))$ に対し $f(V) \subset U$ となる $V \in \mathbf{V}(a)$ をとれば，$a_\alpha \in U \quad (\alpha \geq \alpha_0)$ となる $\alpha_0 \in A$ が存在．このとき $f(a_\alpha) \in f(V) \subset U \quad (\alpha \geq \alpha_0)$ となり，従って $\lim f(a_\alpha) = f(a)$ となる．

逆に f について $(*)$ が成立したとする．仮に a で連続ではないとすると任意の $V \in \mathbf{V}(a)$ に対し $a_V \in V - f^{-1}(U)$ がとれるような $U \in \mathbf{V}(f(a))$ が存在する．$\{a_V\}_{V \in \mathbf{V}(a)}$ は a に収束する有向集合 $\mathbf{V}(a)$ 上の有向点列だから，仮定 $(*)$ より $f(a_V) \in U \quad (V \subset V_0)$ となる $V_0 \in \mathbf{V}(a)$ が存在するが，これは a_V のとり方に矛盾する．故に f は a で連続となる．　$\square$

p. 246　13.*

解答　S が Hausdorff 空間だとする．$a, b \quad (a \neq b)$ が有向集合 A 上の有向点列 $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ の極限だとする．仮定より $U \cap V = \varnothing$ となる a, b の近傍 U, V がとれる．$a_\alpha \in U \quad (\alpha \geq \alpha_0)$，$a_\alpha \in V \quad (\alpha \geq \beta_0)$ となる $\alpha_0, \beta_0 \in A$ が存在．更に $\alpha_0, \beta_0 \leq \gamma_0$ となる $\gamma_0 \in A$ をとれば $a_{\gamma_0} \in U \cap V$ となるが，これは $U \cap V = \varnothing$ と矛盾する．故に $a = b$ となる．

逆に任意の有向点列の極限は高々 1 つだとする．$a \neq b$ となる $a, b \in S$ に対し $U \cap V \neq \varnothing \quad (U \in \mathbf{V}(a),\ V \in \mathbf{V}(b))$ だと仮定する．(U, V)，$(U', V') \in \mathbf{V}(a) \times \mathbf{V}(b)$ について

$$(U, V) \prec (U', V') \quad \Leftrightarrow \quad U \supset U' \text{ かつ } V \supset V'$$

とすれば $\prec$ は $\mathbf{V}(a) \times \mathbf{V}(b)$ 上の順序であり，(U, V)，$(U', V') \in \mathbf{V}(a) \times \mathbf{V}(b)$ に対し $(U \cap U', V \cap V') \in \mathbf{V}(a) \times \mathbf{V}(b)$ について (U, V)，$(U', V') \prec (U \cap U', V \cap V')$ となるから，$\mathbf{V}(a) \times \mathbf{V}(b)$ は $\prec$ に関し有向集合となる．各 $(U, V) \in \mathbf{V}(a) \times \mathbf{V}(b)$ に対し $a_{U,V} \in U \cap V$ をとれば $\{a_{U,V}\}$ は有向点列となる．任意の $U \in \mathbf{V}(a)$ に対し

$$a_{U',V'} \in U' \cap V' \subset U \cap V' \subset U \qquad (\forall (U', V') \in \mathbf{V}(a) \times \mathbf{V}(b) \text{ s.t. } U' \subset U)$$

だから $\{a_{U,V}\}$ は a に収束．同様に考えれば $\{a_{U,V}\}$ は b にも収束するが，これは有向点列の極限が高々 1 つである事に反する．故に $U \cap V = \varnothing$ となる $U \in \mathbf{V}(a)$，$V \in \mathbf{V}(b)$ が存在する．　$\square$

p. 246　14.*

解答 (a) M は a に収束する任意のフィルターに属すとする．特に a の近傍系 $\mathbf{V}(a)$ はフィルターだから $M \in \mathbf{V}(a)$，即ち $a \in U \subset M$ となる開集合 U が存在する．よって a は M の内点となる．逆に a は M の内点だとすると M は a の近傍，従って $M \in \mathbf{V}(a)$．$\mathfrak{F}$ が a に収束するフィルターならば $\mathbf{V}(a) \subset \mathfrak{F}$，従って $M \in \mathfrak{F}$ となる．

(b) a に収束し，かつ $M \in \mathfrak{F}$ となるフィルター $\mathfrak{F}$ が存在したとする．任意の $U \in \mathbf{V}(a)$ について $M \cap U \in \mathfrak{F}$ であり，$\varnothing \notin \mathfrak{F}$ だから $M \cap U \neq \varnothing$．よって a は M の触点である．一方，M の触点 a に対し

$$\mathfrak{F} = \{U \subset S : \exists\, V \in \mathbf{V}(a) \text{ s.t. } V \cap M \subset U\}$$

とする．

(i) a は M の触点だから任意の $V \in \mathbf{V}(a)$ に対し $V \cap M \neq \varnothing$．これより $\varnothing \notin \mathfrak{F}$ となる．
(ii) $U \in \mathfrak{F}$，$U \subset U' \subset S$ だとする．$V \cap M \subset U$ となる $V \in \mathbf{V}(a)$ をとれば $V \cap M \subset U'$ だから $U' \in \mathfrak{F}$ となる．
(iii) $U, U' \in \mathfrak{F}$ に対し $V \cap M \subset U$，$V' \cap M \subset U'$ となる $V, V' \in \mathbf{V}(a)$ が存在．$W \subset V \cap V'$ となる $W \in \mathbf{V}(a)$ をとれば $W \cap M \subset (V \cap M) \cap (V' \cap M) \subset U \cap U'$ となるから $U \cap U' \in \mathfrak{F}$.

以上より $\mathfrak{F}$ はフィルターである事が分かる．任意の $U \in \mathbf{V}(a)$ に対し $M \cap U \subset U$ より $U \in \mathfrak{F}$，従って $\mathbf{V}(a) \subset \mathfrak{F}$，即ち a に収束する．また $M \cap U \subset M$ より $M \in \mathfrak{F}$ となる．　$\square$

p. 246　15.*

解答 $\mathfrak{F}$ がフィルターである事：

(i) 任意の $U \in \mathfrak{F}$ に対し $a_\alpha \in U \quad (\alpha \geq \alpha_0)$ となる $\alpha_0 \in A$ が存在．従って $U \neq \varnothing$，即ち $\varnothing \notin \mathfrak{F}$ である．
(ii) $U \in \mathfrak{F}$，$U \subset U' \subset S$ だとする．U に対し $a_\alpha \in U \quad (\alpha \geq \alpha_0)$ となる $\alpha_0 \in A$ をとれば $a_\alpha \in U' \quad (\alpha \geq \alpha_0)$ となるから $U' \in \mathfrak{F}$.
(iii) $U, V \in \mathfrak{F}$ に対し $a_\alpha \in U \quad (\alpha \geq \alpha_0)$，$a_\beta \in V \quad (\beta \geq \beta_0)$，となる $\alpha_0, \beta_0 \in A$ がとれる．A は有向集合だから $\alpha_0 \leq \gamma_0$，$\beta_0 \leq \gamma_0$ となる $\gamma_0 \in A$ が存在する．$\alpha \geq \gamma_0$ となる任意の $\alpha \in A$ に対し，$\alpha_0 \leq \alpha$，$\beta_0 \leq \alpha$ だから，$a_\alpha \in U \cap U'$，従って $U \cap U' \in \mathfrak{F}$ となる．

以上より $\mathfrak{F}$ はフィルターである事が確められた．

収束の同値性：有向点列 $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が a に収束したとする．任意の $U \in \mathbf{V}(a)$ に対し $a_\alpha \in U \quad (\alpha \geq \alpha_0)$ となる $\alpha_0 \in A$ がとれるから，$\mathfrak{F}$ の定義より $U \in \mathfrak{F}$．即ち，$\mathbf{V}(a) \subset \mathfrak{F}$ となり $\mathfrak{F}$ は a に収束する．逆に $\mathfrak{F}$ が a に収束するならば $\mathbf{V}(a) \subset \mathfrak{F}$ だから，任意の $U \in \mathbf{V}(a)$ に対し $a_\alpha \in U \quad (\alpha \geq \alpha_0)$ となる $\alpha_0 \in A$ が存在する．　$\square$