§5.2　コンパクト性

p. 223　1.　位相空間 S の部分集合 M がコンパクトであるためには，次の (C_M) の成り立つ事が必要十分である事を示せ．
(C_M)　M の S に於ける任意の開被覆は M の (S に於ける) 有限被覆を含む．

解答　M がコンパクトだとする．$\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $M \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ となる S の開集合族だとする．$U_\lambda = O_\lambda \cap M$ と置けば U_λ は M の開集合であり，$M = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ となる．仮定より $M = U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_m}$ となる $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \Lambda$ が存在．このとき $M \subset O_{\lambda_1} \cup \cdots \cup O_{\lambda_m}$ となる．

逆に (C_M) が成立したとする．M の任意の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる．各 U_λ は $U_\lambda = O_\lambda \cap M \quad (O_\lambda \in \mathfrak{O})$ と表され，S の開集合族 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について $M \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ となるから，仮定より $M \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{\lambda_i}$ となる有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在．このとき $M = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$ となる事は明らか．よって M はコンパクトである．　□

p. 223　2.　[松坂] 第 5 章 §2 定理 10
「位相空間 S の有限個の部分集合 $M_1, \cdots, M_n$ の何れもコンパクトならば $M_1 \cup \cdots \cup M_n$ もコンパクトである」
を示せ．

解答　$M_1 \cup \cdots \cup M_n \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ となる任意の開集合族 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる．この族は各 M_i を覆うから M_i のコンパクト性より $M_i \subset \bigcup_{j=1}^{n_i} O_{\lambda_{i,j}}$ となる $\lambda_{i,1}, \cdots, \lambda_{i,n_i} \in \Lambda$ が存在し，

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{n_i} O_{\lambda_{i,j}}$$

となる．故に $M_1 \cup \cdots \cup M_n$ もコンパクトである．　□

p. 223　3.　集合 S に於いて $S, \varnothing$ 及び S の有限部分集合全体から成る S の部分集合系を $\mathfrak{A}$ とすれば，$\mathfrak{A}$ は [松坂] 第 4 章 §2 p.157 の (Ai), (Aii), (Aiii) を満足し，従って $\mathfrak{A}$ を閉集合系とする位相が S 導入される事を示せ．また，この位相空間 S はコンパクトである事を示せ．

解答　(Ai)　定義より明らか．

(Aii)　$A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ とする．A_1，A_2 の何れかが S または $\varnothing$ のときは自明だから，共に $S, \varnothing$ ではないとしてもよい．このとき $\sharp(A_1 \cup A_2) \leq \sharp A_1 + \sharp A_2 < \infty$ より $A_1 \cup A_2$ は再び S の有限部分集合，従って $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{A}$ となる．

(Aiii)　$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathfrak{A}$ の任意の族とする．S が含まれる場合，それを除いても全体の共通部分と一致．また $\varnothing$ が含まれる場合，全体の共通部分は $\varnothing$ となるから，$S, \varnothing$ は含まれないと仮定する．このとき $\sharp(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \leq \sharp A_\lambda < \infty$ だから $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{A}$ となる．

以上より $\mathfrak{A}$ は閉集合系の公理を満たし，$\mathfrak{A}$ を閉集合の全体とするような S 上の位相構造が一意に定まる．

$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を S の開被覆とする．

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda^c = \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right)^c = S^c = \varnothing$$

となる．$U_\lambda \neq \varnothing, S$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在すれば，その一つ λ_0 を固定．$U_{\lambda_0}^c = \{a_1, \cdots, a_n\} \quad (n < \infty)$ と表すとき，仮定より各 a_i に対し $a_i \notin U_{\lambda_i}^c$ となる $\lambda_i \in \Lambda$ が存在．$\bigcap_{i=0}^{n} U_{\lambda_i}^c = \varnothing$，従って $\bigcup_{i=0}^{n} U_{\lambda_i} = S$ となる．よって S の任意の開被覆は有限被覆を持つ．故に S はコンパクトである．　□

p. 223　4.　$\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2$ は集合 S 上の位相で，$\mathfrak{O}_1 \supset \mathfrak{O}_2$ であるとし，更に $(S, \mathfrak{O}_1)$ はコンパクト，$\mathfrak{O}_2$ は Hausdorff の分離公理を満たすとする．このとき $\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{O}_2$ である事を示せ．

解答 S の恒等写像 1_S は位相空間 $(S, \mathfrak{O}_1)$ から $(S, \mathfrak{O}_2)$ への連続な全単射である．また $(S, \mathfrak{O}_1)$ はコンパクト，$(S, \mathfrak{O}_2)$ は Hausdorff 空間だから，[松坂] 第 5 章 §2 定理 15 (p.216) より 1_S は同相写像である． □

p. 223 5. S_1 をコンパクトな位相空間，S_2 を任意の位相空間とする．このとき直積空間 $S = S_1 \times S_2$ から S_2 への射影 pr_2 は閉写像である事を証明せよ．(位相空間間の写像 $f : X \to Y$ について，X の任意の閉集合 F の f による像 $f(F)$ が Y の閉集合となるとき，f を**閉写像**という.)

解答 F を S の閉集合とする．$y \in \mathrm{pr}_2(F)^c$ について，任意の $x \in S_1$ に対し $(x, y) \notin F$ だから，$(U_x \times V_x) \cap F = \varnothing$ となる x, y それぞれの開近傍 $U_x \subset S_1$, $V_x \subset S_2$ が存在する．$\{U_x\}_{x \in S_1}$ は S_1 の開被覆だから，S_1 がコンパクトである事より $S_1 = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ となる有限個の $x_1, \ldots, x_n \in S_1$ が存在する．$V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$ とすれば V は S_2 に於ける y の開近傍．仮に $y' \in V \cap \mathrm{pr}_2(F)$ がとれたとすると $(x, y') \in F$ となる $x \in S_1$ 及び $x \in U_{x_i}$ となる i が存在し，$(x, y') \in (U_{x_i} \times V_{x_i}) \cap F$ となるが，これは U_x, V_x のとり方に矛盾する．よって $V \subset \mathrm{pr}(F)^c$ となり，$\mathrm{pr}_2(F)^c$ は開集合，即ち $\mathrm{pr}_2(F)$ は S_2 の閉集合である． □

p. 223 6. 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ に対し，S に含まれない 1 点 $\{x_\infty\}$ を付け加えた空間 $S^* = S \cup \{x_\infty\}$ に対し，

$$\mathfrak{A}_0 = \varnothing \text{ 及びコンパクトな閉部分集合全体},$$
$$\mathfrak{O}_\infty = \{O \subset S^* : S^* - O \in \mathfrak{A}_0\},$$
$$\mathfrak{O}^* = \mathfrak{O} \cup \mathfrak{O}_\infty$$

と置く．$\mathfrak{O}^*$ が S^* における位相となる事を確かめよ．

解答 (Oi) $S^* - S^* = \varnothing \in \mathfrak{A}_0$ より $S^* \in \mathfrak{O}^*$．$\mathfrak{O} \subset \mathfrak{O}^*$ より $\varnothing \in \mathfrak{O}^*$ は自明.

(Oii) $O_1, O_2 \in \mathfrak{O}^*$ とする．$x_\infty \notin O_1 \cap O_2$ ならば p.220 (2.3) に注意すれば $O_1 \cap O_2 = (S \cap O_1) \cap (S \cap O_2) \in \mathfrak{O}$. $x_\infty \in O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}_\infty$ ならば $S^* - (O_1 \cap O_2) = (S^* - O_1) \cup (S^* - O_2)$．$S^* - O_i$ はコンパクトな閉集合だから，問題 2 と併せて $S^* - (O_1 \cap O_2) = (S^* - O_1) \cup (S^* - O_2)$ はコンパクトな閉集合となり，よって $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}_\infty$ となる.

(Oiii) $O_\lambda \in \mathfrak{O}^*$ $(\lambda \in \Lambda)$ とする．$x_\infty \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ ならば $O_\lambda \in \mathfrak{O}$ だから $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O} \subset \mathfrak{O}^*$．$x_\infty \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ のとき，

$$\begin{aligned} S^* - \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda &= S^* - \left(\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \right) \cup \{x_\infty\} \right) = S^* - \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (O_\lambda \cup \{x_\infty\}) \right) \\ &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (S^* - O_\lambda \cup \{x_\infty\}) = \bigcap_{x_\infty \in O_\lambda} (S^* - O_\lambda) \cap \bigcap_{x_\infty \notin O_\lambda} (S - O_\lambda). \end{aligned}$$

$x_\infty \in O_\lambda$ ならば $S^* - O_\lambda$ は S のコンパクト閉集合，$x_\infty \notin O_\lambda$ ならば $S - O_\lambda$ は S の閉集合だから $S^* - \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ はコンパクト閉集合となり，従って $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}_\infty$ となる.

以上より $\mathfrak{O}^*$ は開集合系の公理を満たし，従って S^* 上の位相構造を定める． □