§5.1 連結性

p. 206 1. S が連結な位相空間ならば，S および $\varnothing$ 以外の S の任意の部分集合 M に対して $M^f \neq \varnothing$ である事を示せ.

解答 $M^f = \varnothing$ だとすると $S = M^i \amalg M^e$ (p.160 (2.9)) となる． M^i，M^e はそれぞれ S の開集合であり，$M \neq \varnothing, S$ より $M^i, M^e \neq \varnothing$ となる． これは M が連結である事に反する． □

p. 206 2. M が位相空間 S の連結な部分集合で，S のある部分集合 A に対して，$M \cap A \neq \varnothing$，$M \cap (S - A) \neq \varnothing$ が成り立つならば，$M \cap A^f \neq \varnothing$ である事を示せ.

解答 $M \cap A^f = \varnothing$ だとすると $M = M \cap (A^i \cup A^f \cup A^e) = (M \cap A^i) \cup (M \cap A^e)$． また $A = (A^i \cap A) \cup (A^f \cap A)$，$A^c = (A^e \cap A) \cup (A^f \cap A)$ と仮定より

$$M \cap A^i = (M \cap A^i \cap A) \cup (M \cap A^f \cap A) = M \cap (A^i \cup A^f) \cap A = M \cap A \neq \varnothing,$$
$$M \cap A^e = (M \cap A^e \cap A^c) \cup (M \cap A^f \cap A^c) = M \cap (A^e \cup A^f) \cap A^c = M \cap A^c \neq \varnothing$$

となるが，これは M が連結である事に反する． 故に $M \cap A^f \neq \varnothing$ である． □

p. 206 3. 位相空間 S が連結である為には，S から 2 点よりなる離散空間の上への連続写像が存在しない事が必要十分である． これを証明せよ.

解答 $I = \{0, 1\}$ (2 点集合) とし，I には離散位相を定義しておく． 連続写像 $f : S \to I$ について $f^{-1}(\{0\})$，$f^{-1}(\{1\})$ は S の開集合であり，$f^{-1}(\{0\}) \cap f^{-1}(\{1\}) = \varnothing$ である． S が連結ならば，$f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{1\})$ の一方は $\varnothing$ でなければならないから $f(S) \neq I$ である． 逆に任意の連続関数 $f : S \to I$ に対し $f(S) \neq I$ だとする. S が連結ではないとすると $U_0 \cap U_1 = \varnothing$，$S = U_0 \cup U_1$ となる $\varnothing$ ではない S の開集合 U_0, U_1 が存在． 写像 $f : S \to I$ を $f(x) = i$ $(x \in U_i)$ $(i = 0, 1)$ で定義すると f は連続関数だが，$f(S) = I$ となり仮定に反する． 故に S は連結である． □

p. 206 4. 位相空間 S で定義された実数値関数 f が**局所定数**であるとは，S の任意の点 a に対し，a の適当な近傍 $V \in \mathbf{V}(a)$ をとれば，V 上で f が定数関数である事，即ち V の全ての点 x に対して $f(x) = f(a)$ となる事をいう． S が連結な位相空間ならば S で定義された局所定数な関数は必ず定数関数である事を証明せよ.

解答 S は連結だとする． f を S 上の局所定数関数とし，$s_0 \in S$ に対し $a_0 = f(s_0)$ と置く． 定義より $f(s) = a_0$ $(a \in O_0)$ となる s_0 を含む或る開集合 O_0 がとれる． 仮に $O_1 = S - O_0 \neq \varnothing$ だとする． 任意の $s_1 \in O_1$ に対し $f(s) = f(s_1) \neq f(s_0)$ $(a \in U_1)$ となる s_1 を含む或る開集合 U_1 がとれるから s_1 は O_1 の内点，従って O_1 は開集合である． しかしこれらより $S = O_0 \amalg O_1$，$O_i \neq \varnothing$ となり S が連結である事に反する． 従って $O_1 = \varnothing$，即ち f は S 上の定数関数となる． □

p. 207 5. A, B が位相空間 S の閉集合で，$A \cup B, A \cap B$ が共に連結ならば，A, B は何れも連結である事を示せ.

解答 A が連結ではないと仮定すると $A = A_1 \amalg A_2$，$A_i \neq \varnothing$ となる S の閉集合 A_1, A_2 が存在． $A \cap B = (A_1 \cap B) \amalg (A_2 \cap B)$ と $A \cap B$ の連結性より $A_1 \cap B$，$A_2 \cap B$ のいずれか一方は $\varnothing$ である． 必要なら添字を変更する事により $A_2 \cap B = \varnothing$ としてもよい． すると $A \cup B$ は $\varnothing$ ではない閉集合の直和 $A \cup B = A_1 \cup B \amalg A_2$ に分割される． しかしこれは $A \cup B$ が連結である事に反する． 故に A は連結． 同様に B の連結性も導かれる． □

p. 207 6. 位相空間 S の連結成分が有限個しかない場合には，その各連結成分は S の閉集合であると同時に開集合でもある事を示せ.

解答　$S = O_1 \cup \cdots \cup O_m$ を S の連結成分分解とする．［松坂］第 5 章 §1 定理 4 (p.198) より各連結成分 O_i は閉集合である．また閉集合の有限個の合併 $O_1 \cup \cdots \cup O_{i-1} \cup O_{i+1} \cup \cdots \cup O_m$ は再び閉集合だから，その補集合である O_i は開集合となる． □

p. 207　7.　位相空間 S の連結な部分集合 $M\ (\neq \varnothing)$ が S の閉集合であると同時に開集合であるとするならば，M は S の 1 つの連結成分である事を示せ．

解答　N を M を含む S の連結成分とする．$N = M \cup (N - M)$，$M \cap (N - M) = \varnothing$ である．M は S の開集合だから N の開集合でもあり，M が閉集合だから $N - M = N \cap (S - M)$ も N の開集合である．$N - M \neq \varnothing$ だとすると N の連結性に反する．故に $N - M = \varnothing$，従って $M = N$ となり，M は S の連結成分である． □

p. 207　8.　位相空間族 $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積空間を $S = \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ とする．S の点 $x = (x_\lambda)$ を含む S の連結成分を C とし，また各 $\lambda \in \Lambda$ に対し x_λ を含む S_λ の連結成分を C_λ とすれば，$C = \prod_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ である事を証明せよ．

解答　$p_\lambda : S \to S_\lambda$ を射影とするとき，［松坂］第 5 章 §1 定理 1 (p.196) より $p_\lambda(C)$ は x_λ を含む連結集合となるから $p_\lambda(C) \subset C_\lambda$．これより $C \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ となる．一方，［松坂］第 5 章 §1 定理 5 (p.199) より $\prod_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ は x を含む S の連結集合だから C に含まれ，従って $C = \prod_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ となる． □

p. 207　9.　S を連結な位相空間，A を S の連結な部分集合，B を $A^c = S - A$ の部分集合とし，B は A^c に於いて開かつ閉であるとする．そのとき，$A \cup B$ は連結である事を示せ．

解答　一般に S の部分集合 X 上の $\mathfrak{O}_S$ に対する相対位相を $\mathfrak{O}_S|_X$ と記す事にする．

今，$O_1, O_2 \in \mathfrak{O}_S|_{A\cup B}$ を $A \cup B = O_1 \amalg O_2$ となる部分空間 $A \cup B$ の開集合とする．

$$A = A \cap (A \cup B) = A \cap (O_1 \amalg O_2) = (A \cap O_1) \amalg (A \cap O_2)$$

だから，A の連結性より $A \cap O_1 \neq \varnothing$ だとすると $A \cap O_2 = \varnothing$，従って $A \subset O_1$，$O_2 \subset A^c \cap (A \cup B) = B$ となる．$O_2 = O_2 \cap B$ だから $O_2 \in (\mathfrak{O}_S|_{A\cup B})|_B = \mathfrak{O}_S|B$ となる．[*1]　B は A^c の開集合だから，O_2 は A^c の開集合でもある．[*2] 一方，$O_2 = A \cap B - O_1$ より O_2 は $A \cup B$ の閉集合である．更に $O_2 = O_2 \cap B$ だから $O_2 \in (\mathfrak{O}^c_S|_{A\cup B})^c|_B = \mathfrak{O}^c_S|B$ となる．[*3]　B は A^c の閉集合だから，O_2 は A^c の閉集合でもある．[*4]　$O_2 \subset (A \cup B) \cap A^c$ だから，［松坂］第 4 章 §5 問題 7 (p.193) より O_2 は $(A \cup B) \cup A^c = S$ の開集合かつ閉集合となるが，S が連結である事から $O_2 = \varnothing$ となる．故に $A \cup B$ は連結である． □

p. 207　10.　S を連結な位相空間，A を S の連結な部分集合とし，B を A^c の 1 つの連結成分とする．そのとき B^c は連結であることを証明せよ．

[*1] 一般に $C \subset D$ となる S の部分集合 C, D に対し $\mathfrak{O}_S|_C = (\mathfrak{O}_S|_D)|_C$ となる．　実際，任意の $O \in \mathfrak{O}_S$ に対し $(O \cap D) \cap C = O \cap (D \cap C) = O \cap C$ である事より $\mathfrak{O}_S|_C = (\mathfrak{O}_S|_D)|_C$ となる事が分かる．

[*2] 一般に $U \subset O$ となる S の部分集合 U, O に対し $U \in \mathfrak{O}_S|_O$ かつ $O \in \mathfrak{O}_S$ ならば $U \in \mathfrak{O}_S$ となる（［松坂］第 4 章 §5 定理 24 (p.189)）．実際，定義より $U = O \cap V$ となる $V \in \mathfrak{O}_S$ が存在．$O \in \mathfrak{O}_S$ ならば $U \in \mathfrak{O}_S$ となる．

[*3] 相対位相 $\mathfrak{O}_S|_{A\cup B}$ に関する閉集合の全体を $\mathfrak{O}^c_S|_{A\cup B} = \{F \cap (A \cup B) \subset A \cup B : F \in \mathfrak{O}^c_S\}$ と記す．　一般に $C \subset D$ となる S の部分集合 C, D に対し $\mathfrak{O}^c_S|_C = (\mathfrak{O}^c_S|_D)^c|_C$ となる．　実際，任意の $F \in \mathfrak{O}^c_S$ に対し $(F \cap D) \cap C = F \cap (D \cap C) = F \cap C$ である事より $\mathfrak{O}^c_S|_C = (\mathfrak{O}^c_S|_D)^c|_C$ となる事が分かる．

[*4] 一般に $E \subset F$ となる S の部分集合 E, F に対し $E \in \mathfrak{O}^c_S|_F$ かつ $F \in \mathfrak{O}_S$ ならば $E \in \mathfrak{O}_S$ となる（［松坂］第 4 章 §5 定理 24 (p.189)）．実際，定義より $E = F \cap E'$ となる $E' \in \mathfrak{O}^c_S$ が存在．$F \in \mathfrak{O}^c_S$ ならば $E \in \mathfrak{O}^c_S$ となる．

解答 $B^c = B^c \cap O_1 \amalg B^c \cap O_2$ となる開集合 O_1, O_2 をとる．$A \subset B^c$ より $A = A \cap O_1 \amalg A \cap O_2$．$A \cap O_1 \neq \varnothing$ だとすると A の連結性より $A \subset O_1$ かつ $O_2 \subset B^c - A$ となる．$B^c \cap O_2$ は B^c 内で開かつ閉集合だから前問より $(B^c \cap O_2) \cup B = O_2 \cup B$ は連結．B は A^c の連結成分だから $B = O_2 \cup B$．従って $O_2 \subset B$ だから $O_2 \cap B^c = (O_2 \cap B) \cap B^c = \varnothing$ が成立．故に B^c は連結である． □

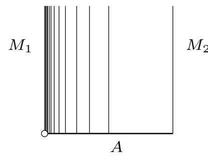
p. 207 11. S を連結な位相空間，A を S の連結な部分集合とし，B を A^c の 1 つの連結成分とする．そのとき $A \cup B$ は連結と言えるか．言えなければ反例を挙げよ．

解答 一般には連結ではない．

(反例) 2 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^2$ の部分空間 $M = M_1 \amalg M_2$ を次で定義する：

$$M_1 = \{(0, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\},$$

$$M_2 = \{(1/n, x_2) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{Z}_{>0}, 0 < x \leq 1\} \cup \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 \leq 1\}$$



M_1, M_2 は弧状連結，従って連結．また M_1 の点 $x = (0, x_2)$ の ε 近傍 $U_\varepsilon(x) \cap M_1$ ($\varepsilon > 0$) に対し十分大きい n をとれば $(1/n, x_2) \in U_\varepsilon(x) \cap M_1$，従って $M_2 \cap U_\varepsilon(x) \cap M_1 \neq \varnothing$．故に M_2 の閉包 M_2^a は M と一致．[松坂] 第 5 章 §1 定理 2 (p.197) より M は連結である．$A = \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 \leq 1\}$ は M の連結部分集合であり，M_1 は A^c の 1 つの連結成分であるが，$A \cup M_1$ は連結ではない． □

p. 207 12. 位相空間 S に於いて，どの連結成分も唯 1 点のみより成る集合となるとき，S は**完全不連結**だという．任意の離散空間は完全不連結である事を示せ．

解答 S を離散位相空間とし，A $(\neq \varnothing)$ を連結成分とする．A は再び離散位相空間となるから，$x \in A$ をとれば $\{x\}$，$A - \{x\}$ は共に部分空間 A の開集合となり，A の連結性より $A - \{x\} = \varnothing$，従って $A = \{x\}$ となる． □

p. 207 13. 位相空間 $\mathbb{R}$ の部分空間として，有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は完全不連結である事を証明せよ．

解答 $a \in \mathbb{Q}$ とし，A を a を含む $\mathbb{Q}$ の連結成分とする．$a < b$ となる $b \in A$ が存在したとすると，$a < c < b$ となる無理数が存在する (例えば $c = \frac{\sqrt{2}a}{1+\sqrt{2}} + \frac{b}{1+\sqrt{2}}$ など)．$A \cap (-\infty, c)$，$A \cap (c, \infty)$ は $\mathbb{Q}$ の開集合であり，

$$A = A \cap (-\infty, c) \amalg A \cap (c, \infty), \quad a \in A \cap (-\infty, c), \quad b \in A \cap (c, \infty)$$

となって A の連結性と矛盾する．故に $A \subset (-\infty, a]$ となる．同様の議論により $A \subset [a, +\infty)$ となる事もわかる．故に $A = \{a\}$ となる． □

p. 207 14. O $(\neq \varnothing)$ を $\mathbb{R}^n$ の連結な開集合とすれば，O の任意の 2 点は O に於ける折れ線で結ばれる事を証明せよ．ただし折れ線とは有限個の線分を繋げたものである．

解答 $x_0 \in O$ を一つ固定し，x_0 から O 内の折れ線で結ばれる O の点の全体を O_1，それ以外の O の点の全体を O_2 とすれば $O = O_1 \cup O_2$ かつ $O_1 \cap O_2 = \varnothing$ である．

$x_1 \in O_1$ について l を x_0 と x_1 を結ぶ折れ線とする．$B(x_1; \varepsilon) \subset O$ となる $\varepsilon > 0$ をとれば任意の $x \in B(x_1; \varepsilon)$ に対し $l'(t) = x_1 + t(x - x_1)$ $(0 \leq t \leq 1)$ とすれば $\|x_1 + t(x - x_1) - x\| = |t-1|\|x - x_1\| < 1 \cdot \varepsilon$ より $l'(t) \in B(x_1; \varepsilon) \subset O$ となるから，l と l' を繋げた折れ線 $l + l'$ は x_1 と x を結ぶ O 内の折れ線となり，従って $B(x_1; \varepsilon) \subset O_1$ となる．

$x_2 \in O_2$ だとする．x_2 について $B(x_2;\varepsilon) \subset O$ となる $\varepsilon > 0$ をとる．$x \in B(x_2;\varepsilon)$ が x_0 と O 内の折れ線 l で結ばれるとすると，l と $B(x_2;\varepsilon)$ 内の線分 $l'(t) = x + t(x_2 - x)$ $(0 \le t \le 1)$ を繋げた折れ線 $l + l'$ は x_0 と x_2 を結ぶ O 内の折れ線となり，$x_2 \in O_2$ である事に反する．従って $B(x_2;\varepsilon) \subset O_2$ となる．

故に O_1, O_2 はそれぞれ開集合となる．$a_0 \in O_1$ より $O_1 \neq \varnothing$ であり，$O_2 \neq \varnothing$ だとすると O が連結である事に反する．よって $O_2 = \varnothing$，従って $O = O_1$ となり，O の任意の点は a_0 と折れ線によって結ばれる．O の任意の 2 点 x, y に対し，x, a_0 を結ぶ折れ線と a_0, y を結ぶ折れ線を繋げれば，x, y は O 内の折れ線で結ばれる．□

p. 207　15.　位相空間 $\mathbb{R}$ の部分空間 $(\neq \mathbb{R})$ で $\mathbb{R}$ 自身と同相であるものは，$(a,b), (a,\infty), (-\infty,b)$ の 3 種類の区間に限る事を証明せよ．

解答　連続写像による連結集合の像は再び連結だから，$\mathbb{R}$ と同相となる $\mathbb{R}$ の真の部分空間は区間になる．上にある開区間は第 4 章 §5 問題 8 ([松坂] p.193) より $\mathbb{R}$ と同相.

仮に半区間 $[a,b)$ $(-\infty < a)$ が $\mathbb{R}$ と同相だとし，$f : [a,b) \to \mathbb{R}$ を同相写像だとする．f によって (a,b) は $\mathbb{R} - \{f(a)\}$ と再び同相となるが，前者は連結，後者は連結ではなく矛盾する．半開区間 $(a,b]$，閉区間 $[a,b]$ についても同様.□

p. 207　16.　$\mathbb{R}^n$ の開球体 $B(x;\varepsilon)$ は凸集合である事を示せ.

解答　$y, z \in B(x;\varepsilon)$ 及び $0 \le t \le 1$ に対し

$$\|(ty + (1-t)z) - x\| = \|(t(y-x) + (1-t)(z-x)\| \le t\|y-x\| + (1-t)\|z-x\| \le t\varepsilon + (1-t)\varepsilon = \varepsilon$$

より $ty + (1-t)z \in B(x;\varepsilon)$ となる．従って $B(x;\varepsilon)$ は凸集合である．□

p. 207　17.　$\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を凸集合からなる $\mathbb{R}^n$ の部分集合族とする．そのとき共通部分 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ も凸である事を示せ．またこのことを用いて次の事を証明せよ：$\mathbb{R}^n$ の任意の部分集合 A が与えられたとき，A を含む $\mathbb{R}^n$ の凸集合のうちに最小のものが存在する．(A を含む $\mathbb{R}^n$ の最小の凸集合を A の**凸包**という.)

解答　$M_\lambda = \varnothing$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在するときは $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \varnothing$ となり，凸集合である．今，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \neq \varnothing$ だとし，$x, y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$，$0 \le t \le 1$ とする．このとき任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $x, y \in M_\lambda$ だから $tx + (1-t)y \in M_\lambda$，よって $tx + (1-t)y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$．故に $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ は凸集合である．

次に A を含む凸集合の全体を $\mathscr{A}$ とすれば $\bigcap \mathscr{A}$ は再び A を含む凸集合であり，更に A を含む任意の凸集合は $\bigcap \mathscr{A}$ を含む．故に $\bigcap \mathscr{A}$ が A を含む最小の凸集合である．□

p. 208　18.　$a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}$ を $\mathbb{R}^n$ の有限個の点とする．そのとき

$$t_1 + \cdots + t_m = 1, \qquad t_1 \ge 0, \ldots, t_m \ge 0$$

であるような実数 $t_1, \ldots, t_m$ によって

$$t_1 a^{(1)} + \cdots + t_m a^{(m)}$$

の形に表される $\mathbb{R}^n$ の点の全体の集合 $S(a^{(1)}, \cdots, a^{(m)})$ は $\mathbb{R}^n$ の凸集合である事を証明せよ．($S(a^{(1)}, \cdots, a^{(m)})$ のような集合を $\mathbb{R}^n$ の**単体**という．特に $m = 2$ の場合は $S(a,b) = \overline{ab}$ $(a, b$ を結ぶ線分) である.)

解答 $x=s_1a^{(1)}+\cdots+s_ma^{(m)}, y=t_1a^{(1)}+\cdots+t_ma^{(m)}\in S(a^{(1)},\cdots,a^{(m)})$ 及び $0\le t\le 1$ について

$$tx+(1-t)y=(ts_1+(1-t)t_1)a^{(1)}+\cdots+(ts_m+(1-t)t_m)a^{(m)},$$
$$\textstyle\sum_{i=1}^m(ts_i+(1-t)t_i)=t\sum_{i=1}^m s_i+(1-t)\sum_{i=1}^m t_i=t+(1-t)=1, \qquad ts_i+(1-t)t_i\le 0$$

だから $tx+(1-t)y\in S(a^{(1)},\cdots,a^{(m)})$．従って $S(a^{(1)},\cdots,a^{(m)})$ は凸集合である． □

p. 208 19. 前問の $S(a^{(1)},\cdots,a^{(m)})$ は集合 $\{a^{(1)},\ldots,a^{(m)}\}$ の凸包である事，即ち $\{a^{(a)},\ldots,a^{(m)}\}$ を含む凸集合は $S(a^{(1)},\cdots,a^{(m)})$ を含む事を証明せよ．

解答 M を $\{a^{(1)},\ldots,a^{(m)}\}$ を含む凸集合とする．m に関する帰納法により

$$t_1+\cdots+t_m=1,\quad t_1,\cdots,t_m\ge 0 \quad ならば \quad t_1a^{(1)}+\cdots+t_ra^{(m)}\in M$$

である事を示す．

$m=2$ のとき，$t_1+t_2=1$，$t_1,t_2\ge 0$ となる t_1,t_2 について $0\le t_1\le 1$ かつ $t_1a^{(1)}+t_2a^{(2)}=t_1a^{(1)}+(1-t_1)a^{(2)}\in M$ となる．

$m>2$ のとき，$t_1+\cdots+t_m=1$，$t_1,\cdots,t_m\ge 0$ となる t_i について $x=t_1a^{(1)}+\cdots+t_ma^{(m)}$，$t=t_1+\cdots+t_{m-1}$ と置く．$t=0$ ならば $x=a^{(m)}\in M$ は自明だから $t>0$ だとする．$s_i=t_i/t \ \ (i=1,\ldots,m-1)$，$y=s_1a^{(1)}+\cdots+s_{m-1}a^{(m-1)}$ と置けば

$$s_1+\cdots+s_{m-1}=(t_1+\cdots+t_{m-1})/t=1, \qquad s_i\ge 0$$

だから，帰納法の仮定より $y\in M$．$0<t\le 1$ 及び $t_r=1-t$ と併せて

$$x=t(s_1a^{(1)}+\cdots+s_{m-1}a^{(m-1)})+t_ma^{(m)}=ty+(1-t)a^{(m)}\in M.$$

従って任意の m に関し成立し，$S(a^{(1)},\cdots,a^{(m)})\subset M$ となる． □

p. 208 20. M が $\mathbb{R}^n$ の凸集合ならば，その閉包 M^a も凸集合である事を示せ．

解答 $x,y\in M^a$，$0<t<1$ に対し $z=tx+(1-t)y$ とする．任意の $\varepsilon>0$ をとる．このとき $x_1\in B(x;\varepsilon)$，$y_1\in B(y;\varepsilon)$ となる $x_1,y_1\in M$ がとれる，$z_1=tx_1+(1-t)y_1\in M$ と置けば $z_1\in M$ であり，

$$\|z-z_1\|\le\|t(x-x_1)\|+\|(1-t)(y-y_1)\|=|t|\|x-x_1\|+|1-t|\|y-y_1\|<\varepsilon$$

より $z_1\in B(z;\varepsilon)\cap M$，即ち $B(z;\varepsilon)\cap M\ne\varnothing$ となる．故に $z\in M^a$，即ち M^a は凸集合である． □

p. 208 21. M を $\mathbb{R}^n$ の凸集合とし，a を M^i の点，b を M^a の点とする．そのとき線分 $\overline{ab}$ 上の b 以外の点は全て M^i に属する事を示せ．またこの事を用いて，M が $\mathbb{R}^n$ の凸集合ならば，その内部 M^i も凸集合である事を示せ．

解答 $t\in(0,1)$ に対し $x=ta+(1-t)b$ と置く．$a\in M^i$ だから $B(a;\varepsilon)\subset M$ となる $\varepsilon>0$ が存在．任意の $x_1\in B(x;t\varepsilon/2)$ をとる．$b\in M^a$ より $b_1\in B(b;t\varepsilon/2(1-t))\cap M$ がとれる．ここで $a_1=(x_1-(1-t)b_1)/t$ と置けば

$$\|ta-ta_1\|=\|x-(1-t)b-(x_1-(1-t)b_1)\|\le\|x-x_1\|+(1-t)\|b_1-b\|<\frac{t\varepsilon}{2}+(1-t)\frac{t\varepsilon}{2(1-t)}=t\varepsilon$$

より $a_1\in B(a;\varepsilon)\ (\subset M)$，従って $x_1=ta_1+(1-t)b_1\in M$ となり，よって $B(x;t\varepsilon/2)\subset M$．故に $x\in M^i$ となる．
上の証明より，特に $a,b\in M^i$ ならば $ta+(1-t)b\in M^i$ となるから，M が凸集合ならば M^i も凸集合である． □

p. 208　22.　$a, c \in \mathbb{R}^n$，$c \neq (0, \cdots, 0)$ とするとき，区間 $[0, \infty)$ を動くパラメーター t によって

$$a + tc$$

の形に表される $\mathbb{R}^n$ の点全部の集合を，a を端点とし，c の向きを持つ**半直線**という．M を $\mathbb{R}^n$ の凸集合とし，a を M の 1 つの内点とする．そのとき，a を端点とする任意の半直線 $a + tc$，$t \geq 0$ は，全く M に含まれるか，または M の境界 M^f とただ 1 点で交わる事を示せ．さらに後者の場合，その交点を $a + t_0 c$ とすれば，点 $a + tc$，$0 \leq t < t_0$ は全て M の内点であり，点 $a + tc$，$t > t_0$ は全て M の外点である事を示せ．

解答　$a + tc \notin M$ となる $t > 0$ が存在する場合のみ考えればよい．$a + t'c \in M$ かつ $t < t'$ となる t' があるとすると，$a + tc = (1 - (t/t'))a + (t/t')(a + t'c) \in M$ となり矛盾．よって $a + t'c \notin M$　$(t < t')$ であり，$\sup\{t \in [0, \infty) : a + tc \in M\} < \infty$ となる．この上限を t_0 とし，$x_0 = a + t_0 c$ と置く．

(i)　ε を任意の正数とする．上限の定義より $a + tc \in M$ かつ $t_0 - t < \varepsilon / \|c\|$ となる t が存在．このとき $a + tc \in B(x_0; \varepsilon) \cap M$ となる．また $t_0 < t$ ならば $a + tc \notin M$ だから $B(x_0; \varepsilon) \cap M \neq \varnothing$．従って $x_0 \in M^f$ となる．
(ii)　$0 \leq t < t_0$ のとき $a \in M^i$，$x_0 \in M^a$ だから，問題 21 より $a + tc \in M^i$　$(0 \leq t < t_0)$ となる．　$\square$