§4.5　部分空間，直積空間

p. 193　1.　M を位相空間 S の部分空間とする．次を証明せよ
(i)　M の閉集合系 $\mathfrak{A}_M$ は $\{A \cap M : A \in \mathfrak{A}\}$　($\mathfrak{A}$ は S の閉集合系) に等しい．
(ii)　x の M に於ける近傍系 $\boldsymbol{V}_M(x)$ は $\{V \cap M : V \in \boldsymbol{V}(x)\}$　($\boldsymbol{V}(x)$ は x の S に於ける近傍系) に等しい．

解答　$A \in \mathfrak{A}$ に対し $A^c \in \mathfrak{O}$ だから $M \cap A^c \in \mathfrak{O}_M$．$M = M \cap A \amalg M \cap A^c$，従って $M \cap A = M - M \cap A^c$ だから $M \cap A \in \mathfrak{A}_M$．逆に $F \in \mathfrak{A}_M$ だとすると $F^c \in \mathfrak{O}_M$，従って $F^c = M \cap O$　($O \in \mathfrak{O}$) と表される．$A = O^c \in \mathfrak{A}$ とすれば $F = M \cap A$ となる．従って等式 (5.4) が成立する．

$V \in \boldsymbol{V}(x)$ に対し $x \in U \subset V$ となる $U \in \mathfrak{O}$ をとる．このとき $x \in U \cap M \subset V \cap M$ より $V \cap M \in \boldsymbol{V}_M(x)$．逆に $W \in \boldsymbol{V}_M(x)$ だとすると $x \in U \cap M \subset W$ となる $U \in \mathfrak{O}$ が存在．$V = U \cup W$ とすれば $V \in \boldsymbol{V}(x)$ であり，$V \cap M = (U \cap M) \cup (W \cap M) = W$ となる．従って等式 (5.5) が成立する．　□

p. 193　2.　M を位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の部分集合とするとき，$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{O}$ の基底 (または準基底) ならば

$$\mathfrak{B}_M = \{O \cap M : O \in \mathfrak{B}\}$$

は M の開集合系 $\mathfrak{O}_M$ の基底 (または準基底) となる事を示せ．

解答　$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{O}$ の基底の場合：U を $\mathfrak{O}_M$ の任意の元とする．U は $\mathfrak{O}$ の元 O を用いて $U = O \cap M$ と表される．任意の $x \in U$ に対し $x \in V \subset O$ となる $V \in \mathfrak{B}$ がとれる．このとき $V \cap M \in \mathfrak{B}_M$ かつ $x \in V \cap M \subset O \cap M = U$ となる．従って $\mathfrak{B}_M$ は $\mathfrak{O}_M$ の基底である．

$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{O}$ の準基底の場合：U を $\mathfrak{O}_M$ の任意の元とする．U は $\mathfrak{O}$ の元 O を用いて $U = O \cap M$ と表される．$\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{O}$ の準基底だから，任意の $x \in U$ に対し $x \in \bigcap_{i=1} rV_i \subset O$ となる有限個の $V_1, \cdots, V_r \in \mathfrak{B}$ がとれる．このとき $V_i \cap M \in \mathfrak{B}_M$ かつ $x \in \bigcap_{i=1} r(V_i \cap M) \subset O \cap M = U$ となる．従って $\mathfrak{B}_M$ は $\mathfrak{O}_M$ の準基底である．　□

p. 193　3.　M を位相空間 S の部分空間とするとき，M の任意の部分集合 X の M に於ける閉包は $\overline{X} \cap M$　($\overline{X}$ は X の S に於ける閉包) となる事を示せ．

解答　定義より $\overline{X} \cap M$ は X を含む M の閉集合である．次に F を X を含む M の閉集合とする．$F = E \cap M$　(E は S の閉集合) と表すとき，$X \subset E$ だから $\overline{X} \subset E$，従って $\overline{X} \cap M \subset F$ となる．よって $\overline{X} \cap M$ は X を含む M の最小の閉集合だから，$\overline{X} \cap M$ が X の M 内の閉包となる．　□

p. 193　4.　前問で，$X \in \mathfrak{P}(M)$ の M に於ける内部を $X^{i'}$，S に於ける内部を X^i とすれば，$X^{i'} \supset X^i$ である事を示せ．また任意の $X \in \mathfrak{P}(M)$ に対し $X^{i'} = X^i$ が成り立つ為には M が S の開集合である事が必要十分である事を示せ．

解答　$X^i \subset X \subset M$ より $X^i = X^i \cap M$ だから，X^i は X に含まれる M の開集合．よって $X^i \subset X^{i'}$ となる．
$X^{i'} = O \cap M$　(O は S の開集合) と表されるとする．M が S の開集合ならば $X^{i'}$ は S の X の開集合となるから $X^{i'} \subset X^i$，従って $X^{i'} = X^i$ となる．逆に任意の $X \subset M$ に対し $X^i = X^{i'}$ が成立するとき，X として $X = M$ とすれば $M = M^{i'} = M^i$ より M は S の開集合である．　□

p. 193　5.　離散空間の任意の部分空間は離散空間，密着空間の任意の部分空間は密着空間である事を示せ.

解答　M を位相空間 S の部分空間とする.

S が離散空間の場合： U を M の任意の部分集合とすると U は S の開集合，かつ $U = U \cap M$ となるから $U \in \mathfrak{O}_M$．従って $\mathfrak{O}_M$ は M 上の離散位相構造となる.

S が密着空間の場合： $\varnothing$ ではない任意の開集合 $U \in \mathfrak{O}_M$ について，定義より $U = O \cap M$ となる $O \in \mathfrak{O}$ が存在. $\mathfrak{O} = \{\varnothing, S\}$ だから $U \neq \varnothing$ と併せて $O = S$，従って $U = M$ となる．よって $\mathfrak{O}_M = \{\varnothing, M\}$，即ち $\mathfrak{O}_M$ は M 上の密着位相構造である. □

p. 193　6. M を位相空間 S の部分集合とする．M の全ての点が M の孤立点である為には，S の部分空間として M が離散空間である事が必要十分である事を示せ.

解答　M が離散空間ならば各点 $x \in M$ に対し $\{x\}$ が M の開集合となり，これより x は M の孤立点となる.

逆に M の任意の点が孤立点だとする．このとき任意の $x \in M$ に対し $U \cap M = \{x\}$ となる開集合 U が存在し，従って 1 点集合 $\{x\}$ は部分空間 M の開集合となる．これより M の任意の部分集合 $V = \bigcup_{x \in V}\{x\}$ は部分空間 M の開集合，即ち M は離散空間である. □

p. 193　7. A_1, A_2, B を位相空間 S の部分集合とし，$B \subset A_1 \cap A_2$ とする．そのとき B が A_1 に於いても A_2 に於いても開集合 (または閉集合) であるならば，$B \subset A_1 \cup A_2$ の老いても開集合 (または閉集合) である事を示せ.

解答　B が A_1，A_2 で開集合だとすると $B = A_1 \cap O_1 = A_2 \cap O_2$ となる S の開集合 O_1, O_2 が存在する．このとき

$$(A_1 \cup A_2) \cap (O_1 \cap O_2) = (A_1 \cap (O_1 \cap O_2)) \cup (A_2 \cap (O_1 \cap O_2)) = (B \cap O_2) \cup (B \cap O_1) = B$$

より B は $A_1 \cup A_2$ の開集合である.

B が A_1，A_2 で閉集合だとすると $B = A_1 \cap F_1 = A_2 \cap F_2$ となる S の閉集合 F_1, F_2 が存在する．このとき

$$(A_1 \cup A_2) \cap (F_1 \cap F_2) = (A_1 \cap (F_1 \cap F_2)) \cup (A_2 \cap (F_1 \cap F_2)) = (B \cap F_2) \cup (B \cap F_1) = B$$

より B は $A_1 \cup A_2$ の閉集合である. □

p. 193　8. $\mathbb{R}$ の開区間 (a, b) は (相対位相に関して)$\mathbb{R}$ と同相な位相空間である事を示せ.

解答　$-\infty < a < b < \infty$ のとき，$f_1 : (a, b) \to (-\pi/2, \pi/2)$ を $f_1(t) = \frac{\pi}{b-a}t - \frac{\pi(a+b)}{2(b-a)}$ により定義すれば f_1 は (a, b) から $(-\pi/2, \pi/2)$ への全単射となる．f_1 は一次式だから連続であり，逆写像も一次式だから連続．よって f_1 は (a, b) から $(-\pi/2, \pi/2)$ への同相写像である．次に $f_2 : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ を $f_1(t) = \tan t$ により定義すれば，f_2 は同相写像である. 従って f_1 と f_2 の合成写像 $f_2 \cdot f_1 : (a, b) \to \mathbb{R}$ は同相写像である.

$-\infty < a,\ b = \infty$ のとき，$f : \mathbb{R} \to (a, \infty)$，$f(t) = a + e^t$，$a = -\infty,\ b < \infty$ のとき，$f : \mathbb{R} \to (-\infty, b)$，$f(t) = b - e^t$ とすれば f は同相写像となる. □

p. 193　9. 位相空間の間の写像が開写像または閉写像であるという性質は，定義域を縮小するとき一般には保存されない事を，例を挙げて示せ.

解答 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x$ とする ($\mathbb{R}$ には通常位相を定義しておく)．f は開写像，かつ閉写像である．$\mathbb{R}$ の閉区間 $I = [0, 1]$ への制限 $f\big|_I$ について，I は部分空間 I の開集合だが，$f\big|_I$ による像は $\mathbb{R}$ の閉集合となる．また $\mathbb{R}$ の開区間 $J = (0, 1)$ への制限 $f\big|_J$ について，J は部分空間 J の閉集合だが，$f\big|_J$ による像は $\mathbb{R}$ の開集合となる．従って開写像，閉写像の部分空間への制限は開写像，閉写像になるとは限らない．□

p. 193 10. $\mathfrak{B}_\lambda \subset \mathfrak{O}_\lambda$ を直積空間 $S = \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ の各因子 S_λ の開基底とする．初等開集合

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(O_{\lambda_i}) = \left(\prod_{\lambda\in\Lambda-\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} S_\lambda \right) \times O_{\lambda_1} \times \cdots \times O_{\lambda_n} \tag{1}$$

で，$O_{\lambda_i} \in \mathfrak{B}_{\lambda_i}$ $(i = 1, \cdots, n)$ となるものの全体は S 上の直積位相 $\mathfrak{O}$ の開基底となる事を示せ．

解答 O を S の開集合だとする．任意の $x = (x_\lambda) \in O$ に対し $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(O_{\lambda_i})$ となる $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ 及び S_{λ_i} の開集合 O_{λ_i} が存在する．各 λ_i について $x_{\lambda_i} \in V_{\lambda_i} \subset O_{\lambda_i}$ となる $V_{\lambda_i} \in \mathfrak{B}_{\lambda_i}$ がとれる．$\mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(V_{\lambda_i}) \subset \mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(O_{\lambda_i})$ より $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(V_{\lambda_i}) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(O_{\lambda_i})$．更に $\lambda = \lambda_i$ ならば $\mathrm{pr}_\lambda(x) = x_\lambda \in V_{\lambda_i}$，従って $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(V_{\lambda_i})$ となる．故に各 O_{λ_i} が $\mathfrak{B}_{\lambda_i}$ に属するような集合 (1) の全体だけを考えても，それだけで既に $\mathfrak{O}$ の基底になっている．□

p. 193 11. 直積空間 $S = \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ の部分集合 $M = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ について，

$$M^a = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^a$$

が成立する事を示せ．

解答 $\mathrm{pr}_\lambda : S \to S_\lambda$ を射影とする．$\lambda \in \Lambda$ に対し $\mathrm{pr}_\lambda^{-1}(\overline{M}_\lambda)$ は $\mathrm{pr}_\lambda^{-1}(M_\lambda)$ を含む閉集合であり，

$$M = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{pr}_\lambda^{-1}(M_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{pr}_\lambda^{-1}(\overline{M}_\lambda) = \prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{M}_\lambda$$

だから $\prod_\lambda \overline{M}_\lambda$ は M を含む閉集合，従って $\overline{M} \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{M}_\lambda$ である．

逆に $x = (x_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{M}_\lambda$ とする．S に於ける x の近傍 O に対し，

$$x \in \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(O_{\lambda_i}) \subset O, \qquad x_{\lambda_i} \in O_{\lambda_i}$$

となる $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ 及び開集合 O_{λ_i} が存在 (定理 **26** 系 **2**)．$x_{\lambda_i} \in \overline{M}_{\lambda_i}$ だから $a_{\lambda_i} \in M_{\lambda_i} \cap O_{\lambda_i}$ がとれる．$\lambda \in \Lambda - \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ に対し任意の $a_\lambda \in M_\lambda$ をとり $a = (a_\lambda)$ とすれば $a \in M \cap \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(O_{\lambda_i})$，従って $M \cap O \neq \varnothing$ となり，よって $x \in \overline{M}$ である．□

p. 193 12. 前問に於いて Λ が有限集合の場合，

$$M^i = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^i$$

も成立する事を示せ．Λ が無限集合の場合にはどうか?

解答　$\mathrm{pr}_\lambda : S \to S_\lambda$ を射影とする．$x = (x_\lambda) \in M^i$ に対し $x \in \bigcap_{i=1}^m \mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(O_{\lambda_i}) \subset M$ となる $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Lambda$ 及び M_{λ_i} に於ける x_{λ_i} の開近傍 O_{λ_i} が存在する．このとき各 $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$x_\lambda \in \mathrm{pr}_\lambda \left(\bigcap_{i=1}^m \mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(O_{\lambda_i}) \right) = \begin{cases} O_{\lambda_i} & (\lambda = \lambda_i) \\ S_\lambda & (\text{otherwise}) \end{cases} \subset M_\lambda,$$

従って $x_\lambda \in M_\lambda^i$．よって $x \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^i$，即ち $M^i \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^i$ となる．Λ が有限な場合，$\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^i = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{pr}_\lambda^{-1}(M_\lambda^i)$ は有限個の開集合の共通部分だから開集合，特に M に含まれる開集合だから $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^i \subset M^i$ となる．

$S = \prod_{n\in\mathbb{N}} S_n$　$(S_n = \mathbb{R})$，$M = \prod_{n\in\mathbb{N}} M_n$　$(M_n = (0,1))$ のとき，$M_n^i = M_n$ だから $\prod_{n\in\mathbb{N}} M_n^i = \prod_{n\in\mathbb{N}} M_n = M$．一方，仮に $x \in M^i$ だとすると $x \in \bigcap_{i=1}^m \mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(O_{n_i}) \subset M$ となる $n_1, \cdots, n_m \in \mathbb{N}$ 及び x_{n_i} の開近傍 O_{n_i} が存在．しかし $n \neq n_1, \cdots, n_m$ のとき，$\mathrm{pr}_n(\bigcap_{i=1}^m \mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(O_{n_i})) = \mathbb{R}$ であって，$\bigcap_{i=1}^m \mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(O_{n_i})$ は M に含まれず矛盾する．故に $M^i = \varnothing$ である．

従って一般に添字集合が有限ならば等号は成立するが，無限集合の場合は成立するとは限らない．□

p. 194　13.　可算個の位相空間族 $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ において，どの S_n も第 2 可算公理を満足するならば，直積空間 $S = \prod_{n\in\mathbb{N}} S_n$ も第 2 可算公理を満たす事を示せ．

解答　各 O_{λ_i} が $\mathfrak{B}_{\lambda_i}$ に属するような集合問題 10 の (1) の全体 $\mathfrak{B}$ が直積位相 $\mathfrak{O}$ の基底となる．この基底の濃度は加算集合 Λ の有限部分集合の全体の濃度に等しく，一般に加算集合の有限部分集合の全体は再び加算集合となる (p.77 問題 **5**) から，$\mathfrak{B}$ は可算集合となる．従って $\mathfrak{O}$ は第 2 可算公理を満たす．□

p. 194　14.　直積集合 $S = \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ から S_λ への射影 pr_λ は一般には閉集合でないことを，例を挙げて示せ．

解答　$S_i = \mathbb{R}$，$S = S_1 \times S_2 = \mathbb{R}^2$ とする．S の閉集合 $M = \{(x,y) \in S : xy = 1\}$ の S_1 への射影 $\mathrm{pr}_1 : S \to S_1$ による像 $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ は S_1 の開集合となる．従って射影による閉集合の像は必ずしも閉集合ではない．□

p. 194　15.　位相空間 S から直積空間 $S' = \prod_{\lambda\in\Lambda} S'_\lambda$ への写像が連続である為には，全ての $\lambda \in \Lambda$ に対し $f_\lambda = \mathrm{pr}_\lambda \cdot f : S \to S'$ が連続である事が必要十分である事を示せ．

解答　f が連続であるとき，S_λ の開集合 O_λ に対し $\mathrm{pr}_\lambda^{-1}(O_\lambda)$ は S' の開集合だから，$f_\lambda^{-1}(O_\lambda) = f^{-1}\left(\mathrm{pr}_\lambda^{-1}(O_\lambda)\right)$ は S の開集合となる．従って f_λ は連続．

逆に各 f_λ が連続だとすると，S_λ の任意の開集合 O_λ に対し $f_\lambda^{-1}(O_\lambda)$ は S の開集合となる．任意の初等開集合 $O = \bigcap_{i=1}^n \mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(O_{\lambda_i})$ について p.31 $(4.3)'$ より

$$f^{-1}(O) = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}\left(\mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(O_{\lambda_i})\right) = \bigcap_{i=1}^n f_{\lambda_i}^{-1}(O_{\lambda_i})$$

となるから $f^{-1}(O)$ は S の開集合である．故に f は連続である．□

p. 194　16.　$(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族，Λ_1 を Λ の部分集合とし，$\Lambda - \Lambda_1$ に属する各 μ に対してそれぞれ S_μ の 1 つの元 x_μ^0 を定めておく．そのとき $\prod_{\lambda\in\Lambda_1} S_\lambda$ の各点 $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_1}$ に $\prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ の点 $x^* = (x_\lambda^*)_{\lambda\in\Lambda}$　(ただし $\lambda \in \Lambda_1$

に対しては $x^*_\lambda = x_\lambda$，$\mu \in \Lambda - \Lambda_1$ に対しては $x^*_\mu = x^0_\mu$) を対応させる写像は，$\prod_{\lambda\in\Lambda_1} S_\lambda$ から $\prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ の部分空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda_1} S_\lambda \times \prod_{\mu\in\Lambda-\Lambda_1}\{x^0_\mu\}$ への同相写像である事を示せ．

解答

$$S = \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda, \qquad T = \prod_{\lambda\in\Lambda_1} S_\lambda, \qquad M = \prod_{\lambda\in\Lambda_1} S_\lambda \times \prod_{\mu\in\Lambda-\Lambda_1}\{x^0_\mu\}$$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rrd, "q_\lambda"] \arrow[rd, "q'"] \arrow[dd, shift left, "q"] & & \\
& M \arrow[ld, hook] & S_\lambda \\
S \arrow[uu, shift left, "p"] \arrow[rru, "\mathrm{pr}_\lambda"'] & &
\end{tikzcd}$$

とし，S から S_λ への射影を pr_λ，T から S_λ への射影を q_λ とする．pr_λ 達から導かれる S から T への写像 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \to (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_1}$ を p と記す．更に問題で構成された写像 T から S への写像を q とすれば $q(T) = M$ であり，また q は単射となる事は明らかだから，q の終集合を M に換えた写像を q' とすれば q' は T から M への全単射となる．

$x = (x_\lambda) \in T$ に対し $\lambda \in \Lambda_1$ のとき $\mathrm{pr}_\lambda \cdot q = q_\lambda$，$\lambda \in \Lambda - \Lambda_1$ のとき $\mathrm{pr}_\lambda \cdot q(x) = x^0_\mu$ (定数写像) だから，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $\mathrm{pr}_\lambda \cdot q$ は連続．よって問題 **15** より q は連続．更に定理 **25** (b) より q' も連続である．

一方，定義より写像 $p : S \to T$ は連続だから，定理 **25** (a) より p の M への制限，即ち q' の逆写像 $(q')^{-1} : M \to T$ は連続である．

以上より q' は T から M への同相写像である事が導かれた． □

p. 194　17.　f を直積空間 $S = \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ から位相空間 S' への連続写像とする．前問のようにして $\prod_{\lambda\in\Lambda_1} S_\lambda$ の各点 x に $\prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ の点 x^* を対応させ，$f_(x) = f(x^*)$ と置けば，f_1 は $\prod_{\lambda\in\Lambda_1} S_\lambda$ から S' への連続写像である事を示せ．

解答　前問の記号を踏襲する．f_1 の定義より $f_1 = f \cdot q$ と表される．q は連続だから，f の連続性と併せれば，f_1 は連続となる． □

p. 194　18.　写像 $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次のように定義する：

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1x_2/(x_1^2 + x_2^2) & ((x_1, x_2) \neq (0,0)), \\ 0 & ((x_1, x_2) = (0,0)). \end{cases}$$

この f は x_1 についても x_2 についても連続であるが，2 変数の写像として点 $(0,0)$ で連続ではない事を示せ．

解答　$x_2 \neq 0$ を一つ固定し，$f(x_1, x_2)$ を変数 x_1 に関する 1 変数関数と見做せば $f(x_1, x_2)$ は明らかに連続である．また $x_2 = 0$ のときも $f(x_1, 0) = 0$ より変数 x_1 に関する 1 変数関数 $f(x_1, 0)$ は連続となる．$f(x_1, x_2)$ は x_1, x_2 に対し対称だから，x_1 を固定して変数 x_2 に関する 1 変数関数と考えても連続となる事が分かる．

一方，2 変数関数と考えた場合，直線 $x_2 = x_1$ 上で $f(x_1, x_2) = 1/2 \ \ (x_1 \neq 0)$ となるから，$0 < \varepsilon < 1/2$ となる任意の ε に対し如何なる $\delta > 0$ をとっても $f(B(0;\delta)) \not\subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ が成立．よって f は原点 $(0,0)$ に於いて連続ではない． □

p. 194　19.　1 つの位相空間 $(S, \mathfrak{O})$，1 つの集合 S'，及び S から S' への写像 f が与えられたとする．そのとき S' の部分集合 O' で $f^{-1}(O') \in \mathfrak{O}$ となるものの全体を $\mathfrak{O}'$ とすれば，$\mathfrak{O}'$ は S' における位相で，f は $(S, \mathfrak{O})$ から $(S', \mathfrak{O}')$ への連続写像となる事を示せ．またこの $\mathfrak{O}'$ は f が連続となるような S' に於ける位相のうちで最も強いものである事を示せ．(この $\mathfrak{O}'$ を，写像 $f : S \to S'$ によって S の位相 $\mathfrak{O}$ から誘導される S' の位相という.)

解答　$\mathfrak{O}'$ が S' 上の位相になる事：

(Oi)　$f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$，$f^{-1}(S') = S$ より $\varnothing, S' \in \mathfrak{O}'$．

(Oii)　$O_1, O_2 \in \mathfrak{O}'$ とする．$f^{-1}(O_1 \cap O_2) = f^{-1}(O_1) \cap f^{-1}(O_2) \in \mathfrak{O}$ より $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}'$ となる．

(Oiii) $O_\lambda \in \mathfrak{O}'$ $(\lambda \in \Lambda)$ とすると $f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(O_\lambda)$ [*4] より $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}'$.
従って $\mathfrak{O}'$ は S' 上の位相構造となる．$\mathfrak{O}'$ の定義より f の連続性は自明.

次に $\mathfrak{O}_1$ を f が連続となるような S' 上の位相構造だとすると，f の連続性より任意の $O_1 \in \mathfrak{O}_1$ について $f^{-1}(O_1) \in \mathfrak{O}$ だから，$\mathfrak{O}'$ の定義より $O_1 \in \mathfrak{O}'$ となる．従って $\mathfrak{O}_1 \leq \mathfrak{O}$ が成立．即ち $\mathfrak{O}'$ は f を連続とするような S' 上の最強の位相構造である. □

p. 194 20. x を位相空間 S の点，V を x の S に於ける近傍とする．そのとき，V に於ける x の任意の近傍は S に於ける x の近傍ともなる事を示せ.

解答 仮定より $x \in U \subset V$ となる S の開集合 U がとれる．今，W を V に於ける x の近傍とすると $x \in W' \subset W$ となる部分空間 V の開集合 W' が存在．更に $W' = O' \cap V$ (O は S の開集合) と表される．ここで $O = O' \cap U$ とすれば O は $x \in O$ となる S の開集合であり，かつ $O \subset W$ が成立．故に W は S に於ける x の近傍でもある. □

[*4] 任意の写像 $f : X \to Y$ と Y の任意の部分集合族 $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について $f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(Y_\lambda)$ である．実際，$x \in f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda)$ ならば或る $\lambda \in \Lambda$ に対し $f(x) \in Y_\lambda$，従って $x \in f^{-1}(Y_\lambda)$ となるから (左辺) $\subset$ (右辺) が成立．逆に $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(Y_\lambda)$ ならば或る $\mu \in \Lambda$ に対し $x \in f^{-1}(Y_\mu)$，従って $f(x) \in Y_\mu \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ となるから $x \in f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda)$．従って (左辺) $\supset$ (右辺) となる.